

Fortgeschrittenenpraktikum der Physik 2002

Versuch Regelungstechnik

Andreas Birnesser
andreas@wirtschaftsphysik.de

Sascha Wagner
sascha@wirtschaftsphysik.de

19.03.2002

Inhaltsverzeichnis

1	THEORETISCHE GRUNDLAGEN	6
1.1	Einführendes Beispiel	6
1.2	Definitionen	6
1.3	Laplace-Transformation	7
1.3.1	Die Transformationsformeln	8
1.3.2	Differentiationssatz und Integrationssatz	9
1.3.3	Wichtige Laplace-Transformierte für die Regeltechnik	9
1.4	BODE-Diagramme	10
1.5	Elemente von Regeleinrichtungen	11
1.5.1	Das P-Element	11
1.5.2	Das PT_1 -Element	11
1.5.3	Das PT_2 -Element	12
1.5.4	Das I-Element	14
1.5.5	Das D-Element	16
1.5.6	Das T_t -Element	17
1.6	Testfunktionen	19
1.6.1	Impulsfunktion	19
1.6.2	Sprungfunktion	19
1.6.3	Anstiegsfunktion und harmonische Funktion	20
1.7	Der Hochpaß	20
1.8	Der Tiefpaß	21
1.9	Der Operationsverstärker	22
1.10	Grundsaltungen des Operationsverstärkers	23
1.10.1	Invertierende Schaltung	23
1.10.2	Nichtinvertierende Schaltung	23
1.11	Für den Versuch wichtige Schaltungen	24
2	VERSUCHSBESCHREIBUNG	26
2.1	Potentiometerkennlinie	27
2.2	Motorkennlinie	27
2.3	Dirac-Delta-Funktion und Sprungfunktion bei der analogen Regelung	27
2.4	Digitale Regelung	28
3	VERSUCHSAUSWERTUNG	29
3.1	Potentiometerkennlinie	29
3.2	Motorkennlinie	31
3.3	Antwortfunktionen auf die Dirac-Delta-Funktion bei der Ver- suchsführung mit einem P-Element	35
3.3.1	Proportional-Element mit Verstärkung 1	37
3.3.2	Proportional-Element mit Verstärkung 2,7	40

INHALTSVERZEICHNIS

2

3.3.3	Proportional-Element mit Verstärkung 10	48
3.3.4	Proportional-Element mit Verstärkung 22	55
3.4	Antwortfunktionen auf die Dirac-Delta-Funktion bei der Ver- suchsführung mit einem PI-Element	62
3.4.1	Analoger Versuchsaufbau	62
3.4.2	Digitaler Versuchsaufbau	70
3.5	Antwort der Elemente auf die Sprungfunktion	78
3.5.1	Analoge Schaltungen	78
3.5.2	Digitale Schaltungen	98
3.6	Umprogrammieren der Applikation	108

Abbildungsverzeichnis

1	Schaltsymbol des P-Elements	11
2	BODE-Diagramm des P-Elements aus [1]	12
3	Schaltsymbol des PT_1 -Elements	12
4	BODE-Diagramm des PT_1 -Elements aus [1]	13
5	Schaltsymbol des PT_2 -Elements	13
6	BODE-Diagramm des PT_2 -Elements aus [1]	14
7	Schaltsymbol des I-Elements	15
8	BODE-Diagramm des I-Elements aus [1]	15
9	Schaltsymbol des D-Elements	16
10	BODE-Diagramm des D-Elements aus [1]	17
11	Schaltsymbol des T_t -Elements	17
12	BODE-Diagramm des T_t -Elements aus [1]	18
13	Schaltbild eines Hochpasses	20
14	Schaltbild eines Tiefpasses	21
15	Schaltbild eines Operationsverstärkers	22
16	Invertierende Grundschtung	23
17	Nichtinvertierende Grundschtung	24
18	Schaltung 1	24
19	Prinzipieller Versuchsaufbau	26
20	Potentiometerkennlinie	30
21	Motorschaubild 1	31
22	Motorschaubild 2	32
23	Motorkennlinie 1	34
24	Motorkennlinie 2	34
25	Antwortfunktion bei analoger Messung und Verstärkung 1	37
26	Analoge Übertragungsfunktion bei der Verstärkung 1	38
27	$\log F $ bei analoger Messung und Verstärkung 1	39
28	Phase ϕ bei analoger Messung und Verstärkung 1	39
29	Antwortfunktion bei analoger Messung und Verstärkung 2,7	40
30	Analoge Übertragungsfunktion bei der Verstärkung 2,7	41
31	$\log F $ bei analoger Messung und Verstärkung 2,7	42
32	Phase ϕ bei analoger Messung und Verstärkung 2,7	42
33	Soll und Stellgröße bei der Verstärkung 2,7	44
34	Antwortfunktion bei digitaler Messung und Verstärkung 2,7	44
35	Digitale Übertragungsfunktion bei der Verstärkung 2,7	45
36	$\log F $ bei digitaler Messung und Verstärkung 2,7	46
37	Phase ϕ bei digitaler Messung und Verstärkung 2,7	46
38	Antwortfunktion bei analoger Messung und Verstärkung 10	48
39	Analoge Übertragungsfunktion bei der Verstärkung 10	49
40	$\log F $ bei analoger Messung und Verstärkung 10	50
41	Phase ϕ bei analoger Messung und Verstärkung 10	50

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

4

42	Soll und Stellgröße bei der Verstärkung 10	51
43	Antwortfunktion bei digitaler Messung und Verstärkung 10	52
44	Digitale Übertragungsfunktion bei der Verstärkung 10	53
45	$\log F $ bei digitaler Messung und Verstärkung 10	53
46	Phase ϕ bei digitaler Messung und Verstärkung 10	54
47	Antwortfunktion bei analoger Messung und Verstärkung 22	55
48	Analoge Übertragungsfunktion bei der Verstärkung 22	56
49	$\log F $ bei analoger Messung und Verstärkung 22	57
50	Phase ϕ bei analoger Messung und Verstärkung 22	57
51	Soll und Stellgröße bei der Verstärkung 22	58
52	Antwortfunktion bei digitaler Messung und Verstärkung 22	59
53	Digitale Übertragungsfunktion bei der Verstärkung 22	60
54	$\log F $ bei digitaler Messung und Verstärkung 22	60
55	Phase ϕ bei digitaler Messung und Verstärkung 22	61
56	Antwortfunktion das ersten analoge PI-Elements	63
57	Analoge Übertragungsfunktion des ersten PI-Elements	64
58	$\log F $ bei analoger Messung des ersten PI-Elements	64
59	Phase ϕ bei analoger Messung des ersten PI-Elements	65
60	Antwortfunktion für das zweite analogen PI-Elements	66
61	Analoge Übertragungsfunktion des zweiten PI-Elements im Bereich $-4 < s < 4$	67
62	Analoge Übertragungsfunktion des zweiten PI-Elements im Bereich $-10 < s < 10$	68
63	$\log F $ bei analoger Messung des zweiten PI-Elements	68
64	Phase bei analoger Messung des zweiten PI-Elements	69
65	Soll und Stellgröße beim ersten digitalen PI-Element	70
66	Antwortfunktion für das ersten digitale PI-Elements	71
67	Digitale Übertragungsfunktion des ersten PI-Elements	72
68	$\log F $ bei digitaler Messung des ersten PI-Elements	72
69	Phase ϕ bei digitaler Messung des ersten PI-Elements	73
70	Soll und Stellgröße beim zweiten digitalen PI-Element	74
71	Antwortfunktion für das zweiten digitale PI-Elements	75
72	Digitale Übertragungsfunktion des zweiten PI-Elements	76
73	$\log F $ bei digitaler Messung des zweiten PI-Elements	76
74	Phase ϕ bei digitaler Messung des zweiten PI-Elements	77
75	Sprungantwort 1 mit P-Element und Verstärkung 1	79
76	Sprungantwort 2 mit P-Element und Verstärkung 1	81
77	Sprungantwort 1 mit P-Element und Verstärkung 2,7	83
78	Sprungantwort 2 mit P-Element und Verstärkung 2,7	85
79	Sprungantwort 1 mit P-Element und Verstärkung 10	87
80	Sprungantwort 2 mit P-Element und Verstärkung 10	89
81	Sprungantwort 1 mit P-Element und Verstärkung 22	91
82	Sprungantwort 2 mit P-Element und Verstärkung 22	93

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

5

83	Sprungantwort 1 mit PI-Element	95
84	Sprungantwort 2 mit PI-Element	97
85	Sprungantwort 1 mit digitaler Regelung	98
86	Sprungantwort 2 mit digitaler Regelung	100
87	Sprungantwort 3 mit digitaler Regelung	102
88	Sprungantwort 4 mit digitaler Regelung	104
89	Sprungantwort 5 mit digitaler Regelung	106
90	Sprungantwort 6 mit digitaler Regelung	107
91	Schematische Darstellung der modifizierten Applikation	108

1 THEORETISCHE GRUNDLAGEN

1.1 Einführendes Beispiel

Als einführendes Beispiel zeigen wir das Prinzip einer Regelung anhand einer Wasserstandsregelung auf. Wir gehen von einem Wasserhahn aus, dessen Durchflussmenge über eine Regelung gesteuert wird. Die Durchflußmenge beträgt:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = K \alpha \quad (1)$$

Hier ist V das Wasservolumen, K eine beliebige Konstante und α der Drehwinkel des Wasserhahns. Für das Gesamtvolumen ergibt sich nun folgende Gleichung:

$$V = \int_0^T K \alpha dt \quad (2)$$

In einem Behälter unter dem Wasserhahn, dessen Wasserstandshöhe geregelt werden soll, ist die Wassermenge $V = Ah(t)$, wobei A die Grundfläche des Behälters und $h(t)$ die Wasserstandshöhe zur Zeit t ist. Für die zu regulierende Höhe h ergibt sich nun folgende Gleichung.

$$h(t) = \frac{K}{A} \int_0^T K \alpha dt \quad (3)$$

Bei diesem Wasserhahn handelt es sich um eine Strecke mit integrierendem Charakter. Dieser und die anderen Regler, werden im weiteren Verlauf beschrieben.

1.2 Definitionen

Das **Steuern** ist der Vorgang, bei welchem in einem System *Ausgangsgrößen* durch *Eingangsgrößen* verändert werden. Kennzeichnend für das Steuern ist der **offene Wirkungskreislauf** über ein Übertragungsglied oder eine Kette von Übertragungsgliedern (Steuerkette).

Das **Regeln** ist der Vorgang, bei dem ein gewünschter Wert der zu regelnden Größe (Regelgröße) durch *Vergleich* mit einer anderen Größe (*Führungsgröße*) fortlaufend hergestellt und aufrechterhalten wird. Kennzeichnend für das Regeln ist der in sich **geschlossene Wirkungsablauf** (Regelkreis).

Die wichtigsten Systemgrößen einer Steuerung sind:

Steuergröße x ist die Größe, welche durch die Steuerung hergestellt und aufrechterhalten werden soll.

Hauptstörrgröße z_1 ist einer *Störrgröße*, welche als Führungsgröße die Steuerung bewirkt.

Die **Stellgröße** y ist die Ausgangsgröße der Steuereinrichtung und zugleich Eingangsgröße der Strecke.

Die wichtigsten Systemgrößen einer Regelung:

Die **Regelgröße** x ist der **Istwert** der Größe, welche hergestellt und aufrechterhalten wird.

Die **Führungsgröße** w ist die Größe, die den **Sollwert** der Regelgröße ausdrückt.

Die **Regeldifferenz** ist die Differenz zwischen Führungsgröße w und Regelgröße x .

Die *Störrgrößen* z sind von außen wirkende Größen, die den Vorgang der Regelung beeinträchtigen.

Weitere wichtige Begriffe:

Die **Steuerstrecke/Regelstrecke** ist der Bereich der Anlage, in welcher Größen durch die Steuerung/Regelung beeinflusst werden.

Der **Regler** erzeugt aus der Regeldifferenz x die Stellgröße y derart, daß ein günstiger zeitlicher Ablauf des Regelvorgangs erreicht wird.

1.3 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist ein spezielles mathematisches Verfahren, mit dessen Hilfe sich lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten verhältnismäßig einfach lösen lassen. Man geht dabei folgendermaßen vor:

- Die Differentialgleichung mit der unabhängigen Variable Zeit wird nach den Regeln der Laplace-Transformation in eine algebraische Gleichung mit einer neuen komplexen Variable $s = \sigma + i\omega$ übersetzt. Die Übersetzung geschieht nach einfachen Regeln, von denen die wichtigsten im Anschluß genannt werden.

- Die übersetzte Gleichung wird algebraisch umgeformt. Dabei ist im allgemeinen eine gebrochen-rationale Funktion von s in Partialbrüche zu zerlegen.
- Die umgeformte Gleichung in s wird mit der Rücktransformationsformel in eine Zeitfunktion zurückverwandelt, welche dann die richtige Lösung der Differentialgleichung darstellt.

1.3.1 Die Transformationsformeln

Die Laplacetransformierte $f(s) = L[f(t)]$ einer Funktion $f(t)$ der Zeit erhält man mit der folgenden Transformationsgleichung:

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4)$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

Aus der Laplace-Transformierten $f(s)$ kann mit Hilfe einer komplexen Umkehrformel, dem Laplace-Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(s)e^{st} ds \quad (6)$$

wieder die Zeitfunktion $f(t) = L^{-1}[f(s)]$ ermittelt werden. Dabei ist der geschlossene Integrationsweg in der komplexen Zahlenebene um alle Polstellen von $f(s)$ zu führen. Der Übergang vom Laplace-Raum, d.h. dem Bildraum, in den Originalraum kann auch mit Hilfe des Residuensatzes auf folgende Weise dargestellt werden.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0^{\infty} f(s)e^{st} ds \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} (f(s)e^{st}) \end{aligned}$$

1.3.2 Differentiationssatz und Integrationsatz

Differenziert man eine Funktion im Zeitbereich, so gilt im Laplace-Raum folgende Beziehung:

$$L \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n f(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1} f(t)}{dt^{i-1}} \Big|_{t=0} \quad (7)$$

Sind die Anfangswerte Null, so vereinfacht sich diese Gleichung auf die gängigere Form:

$$L \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n f(s)$$

Integriert man eine Funktion im Zeitbereich, dann gilt im Laplace-Raum folgender Zusammenhang:

$$L \left[\int f(t) dt \right] = \frac{1}{s} f(s) \quad (8)$$

1.3.3 Wichtige Laplace-Transformierte für die Regeltechnik

Eine in der Regeltechnik häufig verwendete Funktion ist die Dirac-Delta-Funktion $\delta(t - T)$. Im folgenden wird die Transformationsgleichung hergeleitet:

$$\begin{aligned} L[\delta(t)] &= \int_0^{\infty} \delta(t - T) e^{-st} dt \\ &= e^{-sT} \end{aligned}$$

Für den Sonderfall $T = 0$ erhält man als Laplace-Transformierte $L[\delta(t)] = 1$.

Des Weiteren stellt die Einheitssprungfunktion $E(t)$ eine wichtige Funktion in der Regeltechnik dar. Ihre Laplace-Transformierte läßt sich unter Anwendung des Integrationsatzes Gleichung (8) berechnen.

$$\begin{aligned} L[E(t)] &= L \left[\int \delta(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} L[\delta(t)] \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

1.4 BODE-Diagramme

Der Frequenzgang entspricht dem Anteil der Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse. Das heißt, die Größe s wird in der Übertragungsfunktion durch $i\omega$ ersetzt und man erhält den Frequenzgang. Dieser läßt sich wie jede komplexe Größe folgendermaßen darstellen:

$$F_{RS}(i\omega) = |F_{RS}(i\omega)|e^{i\phi_{RS}(i\omega)} \quad (9)$$

Betrag und Phase berechnen sich nach den aus der komplexen Zahlenlehre bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} |F_{RS}(i\omega)| &= \sqrt{(\operatorname{Im}F_{RS}(i\omega))^2 + (\operatorname{Re}F_{RS}(i\omega))^2} \\ \phi_{RS}(i\omega) &= \arctan \frac{\operatorname{Im}F_{RS}(i\omega)}{\operatorname{Re}F_{RS}(i\omega)} \end{aligned}$$

Beim BODE-Diagramm werden der Betrag $|F_{RS}(i\omega)|$ und die Phase $\phi_{RS}(i\omega)$ des Frequenzganges des offenen Regelkreises über die Kreisfrequenz aufgetragen. Dabei wird ein logarithmischer Maßstab verwendet. Die dabei entstehenden Diagramme werden auch als Frequenzkennlinien-Diagramme bezeichnet.

Die Vorteile dieser Darstellung sind:

- Durch die logarithmische Darstellung läßt sich ein großer Amplituden- und Frequenzbereich erfassen.
- Der Kurvenverlauf hat in allen Frequenzbereichen eine gleichbleibende relative Genauigkeit.
- Bei einer Reihenschaltung von mehreren Übertragungselementen werden die Frequenzgänge multipliziert. Im BODE-Diagramm werden statt der aufwendigen Multiplikation komplexer Frequenzgänge Phasenwinkel und logarithmierte Beträge graphisch addiert.
- Die graphische Addition ist einfach auszuführen, da sich die Frequenzkennlinien-Diagramme der regelungstechnischen Grundelemente im allgemeinen durch Geraden annähern lassen.

1.5 Elemente von Regeleinrichtungen

1.5.1 Das P-Element

Die Differentialgleichung des Proportionalelements lautet:

$$x_a(t) = K_P x_e(t) \quad (10)$$

Dabei bezeichnet man die Konstante K_P als Proportionalitätskonstante. Durch Anwendung der Laplace-Transformation ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = K_P \quad (11)$$

Das Schaltsymbol des Proportional-Elements wird im allgemeinen folgendermaßen dargestellt.

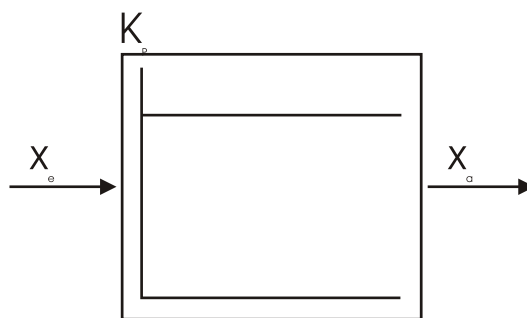


Abbildung 1: Schaltsymbol des P-Elements

Für das BODE-Diagramm benötigt man noch den logarithmischen Verlauf des Betrages der Frequenzgangsfunktion und den Phasenverlauf:

$$\lg |F_{RS}(i\omega)| = K_P \quad (12)$$

$$\phi_{RS}(i\omega) = 0^\circ \text{ bzw. } 180^\circ \quad (13)$$

1.5.2 Das PT_1 -Element

Die Differentialgleichung des Proportional-Elements mit Verzögerung 1. Grades lautet:

$$T_1 \frac{dx_a(t)}{dt} + x_a(t) = K_P x_e(t) \quad (14)$$

K_P ist die bereits bekannte Proportionalitätskonstante, während man T_1 als Zeitkonstante bezeichnet. Durch Anwendung der Laplace-Transformation ergibt sich die Übertragungsfunktion:

1 THEORETISCHE GRUNDLAGEN

12

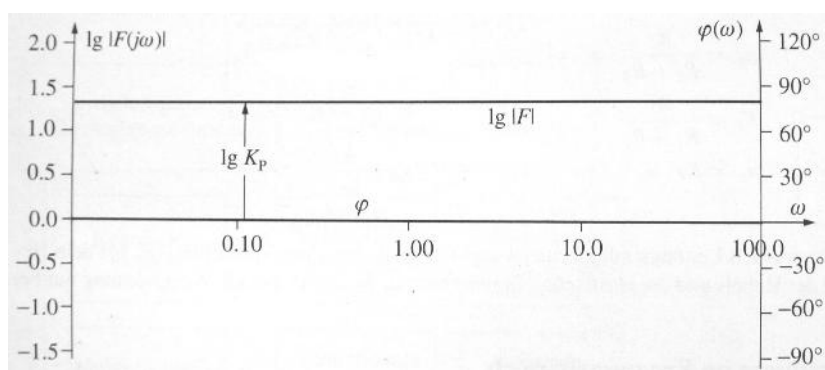


Abbildung 2: BODE-Diagramm des P-Elements aus [1]

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{K_P}{1 + sT_1} \quad (15)$$

Das Schaltsymbol des Proportional-Elements mit Verzögerung 1. Grades wird im allgemeinen folgendermaßen dargestellt.

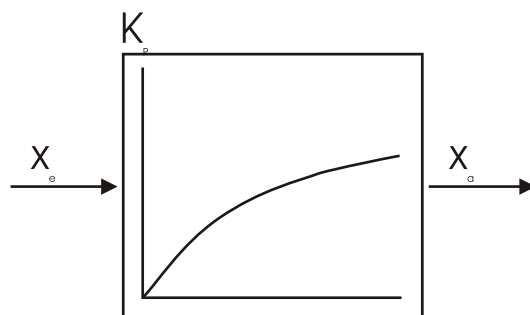


Abbildung 3: Schaltsymbol des PT_1 -Elements

Für das BODE-Diagramm benötigt man noch den logarithmischen Verlauf des Betrages der Frequenzgangsfunktion und den Phasenverlauf:

$$\lg |F_{RS}(i\omega)| = \lg K_P - \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \quad (16)$$

$$\phi_{RS}(i\omega) = -\arctan \omega T_1 \quad (17)$$

1.5.3 Das PT_2 -Element

Die Differentialgleichung des Proportional-Elements mit Verzögerung 2. Grades lautet:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 x_a(t)}{dt^2} + \frac{2D}{\omega_0^2} \frac{d x_a(t)}{dt} + x_a(t) = K_P x_e(t) \quad (18)$$

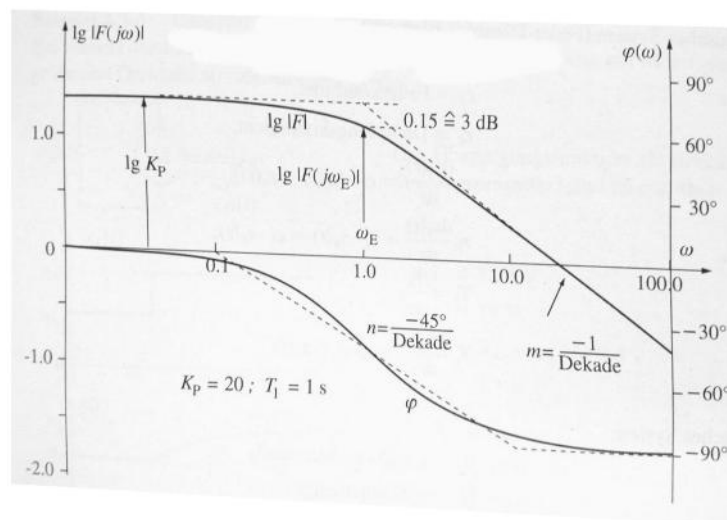


Abbildung 4: BODE-Diagramm des PT_1 -Elements aus [1]

Dabei ist ω_0 die sogenannte Kernkreisfrequenz - die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems. D ist die Dämpfungskonstante des Systems. K_P die Proportionalitätskonstante.

Durch Anwendung der Laplace-Transformation ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{K_P}{1 + 2D\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s^2}{\omega_0^2}\right)} \quad (19)$$

Das Schaltsymbol des Proportional-Elements mit Verzögerung 2. Grades wird im allgemeinen folgendermaßen dargestellt.

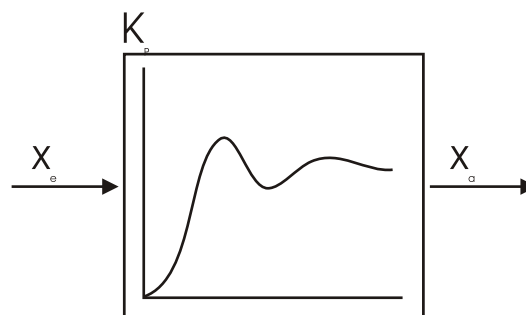
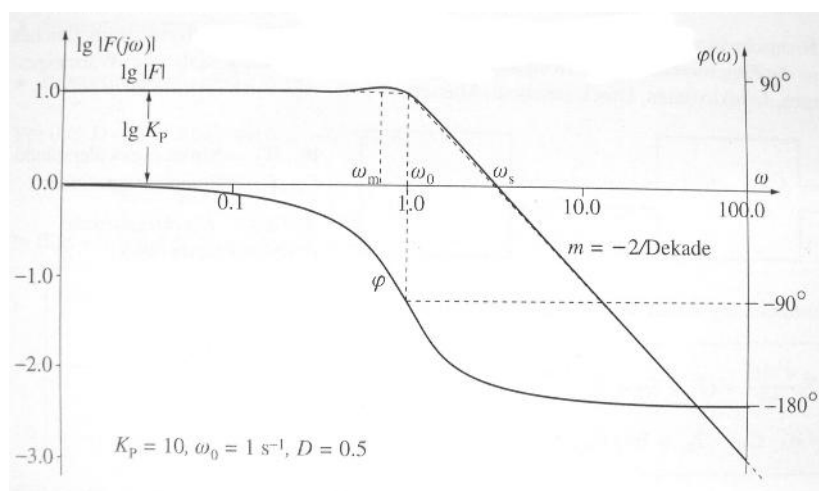


Abbildung 5: Schaltsymbol des PT_2 -Elements

Für das BODE-Diagramm benötigt man noch den logarithmischen Verlauf des Betrages der Frequenzgangsfunktion und den Phasenverlauf:

$$\lg |F_{RS}(i\omega)| = \lg K_P - \lg \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2D\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2} \quad (20)$$

$$\phi_{RS}(i\omega) = -\arctan \frac{2D\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (21)$$

Abbildung 6: BODE-Diagramm des PT_2 -Elements aus [1]

1.5.4 Das I-Element

Die Differentialgleichung des Integral-Elements lautet:

$$x_a(t) = K_I \int x_e(t) dt \quad (22)$$

K_I ist die sogenannte Integrationskonstante. Durch Anwendung der Laplace-Transformation ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{K_I}{s} \quad (23)$$

Das Schaltsymbol des Integral-Elements wird im allgemeinen folgendermaßen dargestellt.

Für das BODE-Diagramm benötigt man noch den logarithmischen Verlauf des Betrages der Frequenzgangsfunktion und den Phasenverlauf:

$$\lg |F_{RS}(i\omega)| = \lg K_I - \lg \omega \quad (24)$$

$$\phi_{RS}(i\omega) = -90^\circ \quad (25)$$

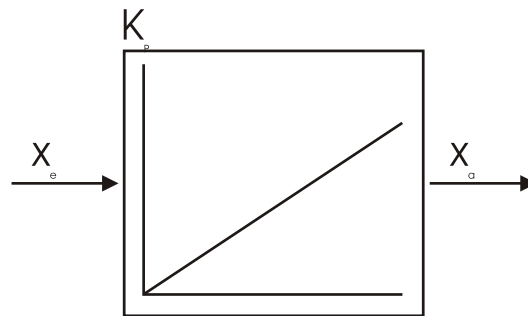


Abbildung 7: Schaltsymbol des I-Elements

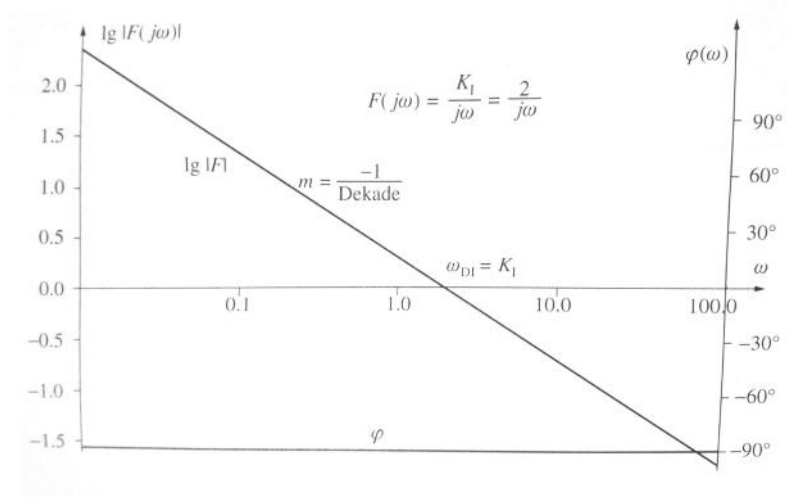


Abbildung 8: BODE-Diagramm des I-Elements aus [1]

1.5.5 Das D-Element

Die Differentialgleichung des Differential-Elements lautet:

$$x_a(t) = K_D \frac{dx_e(t)}{dt} \quad (26)$$

Mit K_D bezeichnen wir die Differentiationskonstante. Durch Anwendung der Laplace-Transformation ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = K_D s \quad (27)$$

Das Schaltsymbol des Differential-Elements wird im allgemeinen folgendermaßen dargestellt.

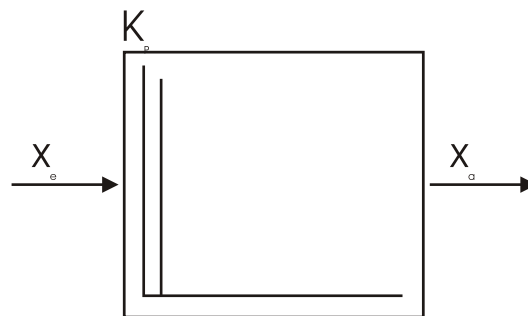


Abbildung 9: Schaltsymbol des D-Elements

Für das BODE-Diagramm benötigt man noch den logarithmischen Verlauf des Betrages der Frequenzgangsfunktion und den Phasenverlauf:

$$\lg |F_{RS}(i\omega)| = \lg K_D + \lg \omega \quad (28)$$

$$\phi_{RS}(i\omega) = +90^\circ \quad (29)$$

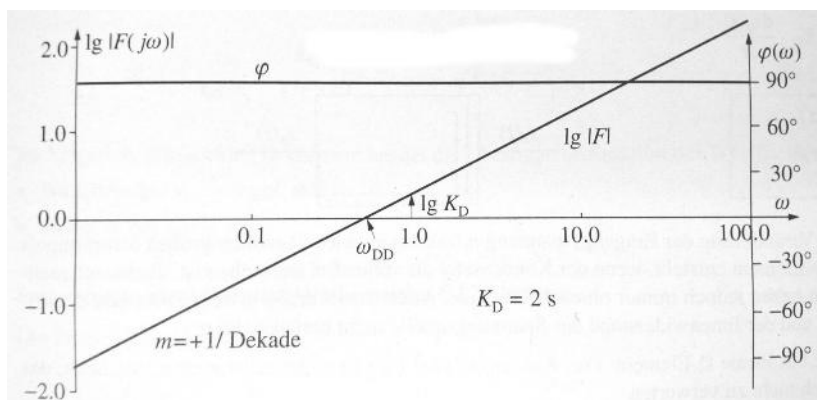


Abbildung 10: BODE-Diagramm des D-Elements aus [1]

1.5.6 Das T_t -Element

Bei regelungstechnischen Problemen tritt häufig das Totzeit-Element auf. Die kennzeichnende Eigenschaft des Totzeit-Elements besteht darin, daß die Ausgangsgröße nach einer Änderung der Eingangsgröße während der Totzeit T_t zunächst ihren Wert beibehält. Die Differentialgleichung des Totzeit-Elements lautet:

$$x_a(t) = K_P x_e(t - T) \quad (30)$$

K_P ist eine Proportionalitätskonstante, welche im Zusammenhang mit dem PT_t -Element auftritt. Für das T_t -Element ist diese Konstante Eins zu setzen. Durch Anwendung der Laplace-Transformation ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = K_P e^{-sT_t} \quad (31)$$

Das Schaltsymbol des Totzeit-Elements wird im allgemeinen folgendermaßen dargestellt.

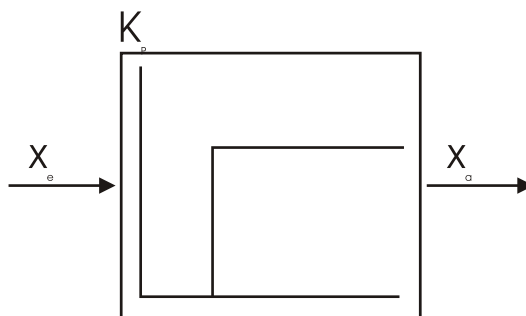


Abbildung 11: Schaltsymbol des T_t -Elements

1 THEORETISCHE GRUNDLAGEN

18

Für das BODE-Diagramm benötigt man noch den logarithmischen Verlauf des Betrages der Frequenzgangfunktion und den Phasenverlauf:

$$\lg |F_{RS}(i\omega)| = \lg K_P \quad (32)$$

$$\phi_{RS}(i\omega) = -\omega T_t \quad (33)$$

Wie man in dem nachfolgenden Diagramm sieht, wächst beim Totzeit-Element die Phase sehr schnell über alle Maße.

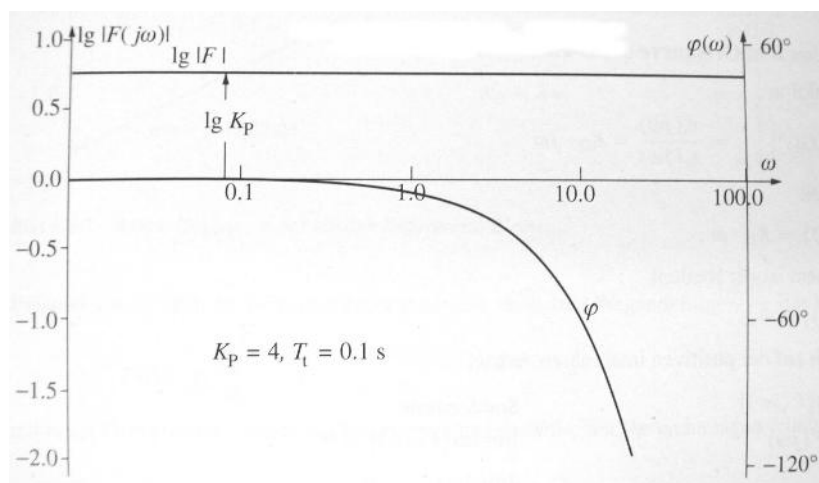


Abbildung 12: BODE-Diagramm des T_t -Elements aus [1]

1.6 Testfunktionen

Um eine Vergleichsmöglichkeit zwischen verschiedenen Regelungssystemen oder bei Parametervariation eines Systems zu erhalten, ist es zweckmäßig, die Lösung der Differentialgleichung für bestimmte Eingangsfunktionen, sogenannte Testfunktionen zu ermitteln. Man erhält normierte Ausgangsfunktionen, die einen Vergleich erleichtern.

Für praktische Untersuchungen empfiehlt sich, die Testfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ als Eingangsgröße aufzuschalten und die Ausgangsgröße aufzuzeichnen. Die Ausgangsgröße geht bei stabilen Systemen von einem stationären Zustand über in den durch die partikuläre Lösung vorgegebenen neuen stationären Zustand. Das dynamische Verhalten ist durch dieses Übergangsverhalten bestimmt.

1.6.1 Impulsfunktion

Die Einheitsimpulsfunktion besteht aus einem Nadelimpuls (Dirac-Delta-Funktion) $\delta(t)$ mit der Fläche Eins. Der Impuls ist wie folgt definiert:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \\ \int \delta(t) dt = 1 & \end{cases} \quad (34)$$

Die Ausgangsgröße wird als Impulsantwort bezeichnet. Eine Impulsfunktion läßt sich physikalisch exakt nicht realisieren. Aus dem Antwortverhalten bei Anregung mit einem kurzen Impuls hoher Amplitude lassen sich jedoch dynamische Eigenschaften wie Eigenfrequenz und Dämpfung ablesen.

Das Antwortverhalten eines P-Elements auf eine Impulsfunktion ist wiederum eine Impulsfunktion, jedoch mit um K_P veränderter Fläche. Beim I-Element ergibt sich eine Sprungfunktion mit der Höhe K_I .

1.6.2 Sprungfunktion

Die Sprungfunktion ist die wichtigste Testfunktion der Regelungstechnik. Die Eingangsfunktion $x_e(t)$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ sprunghaft von Null auf einen Wert x_{e0} geändert:

$$x_e(t) = x_{e0}E(t) \quad (35)$$

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (36)$$

$E(t)$ wird Schaltfunktion oder Einheitssprungfunktion genannt. Der zeitliche Verlauf $x_a(t)$ als Ergebnis dieser Anregungsfunktion ist die Sprungantwort.

Das Antwortverhalten eines P-Elements ist hier ebenfalls wieder eine Sprungfunktion. Beim D-Element entsteht eine Impulsfunktion und beim I-Element eine lineare Funktion. Auch eine Sprungfunktion läßt sich physikalisch nicht exakt realisieren.

1.6.3 Anstiegsfunktion und harmonische Funktion

Bei der Anstiegsfunktion wird das Eingangssignal mit konstanter Geschwindigkeit vergrößert. Für das P-Element ergibt sich auch hier wieder eine um K_P verstärkte Anstiegsfunktion. Für den D-Regler ergibt sich eine konstante Funktion und für den I-Regler eine quadratische Funktion.

Als weitere Testfunktionen lassen sich auch noch die harmonischen Funktionen verwenden. Sie finden allerdings als stetige, differenzierbare Funktionen nicht so häufig Anwendung als Testfunktion.

1.7 Der Hochpaß

Beim Hochpaßfilter handelt es sich um eine Schaltung, die hohe Frequenzen bevorzugt passieren läßt. Ein Hochpaß kann folgendermaßen als Schaltung eines Kondensators der Kapazität C und des Widerstandes R erzeugt werden.

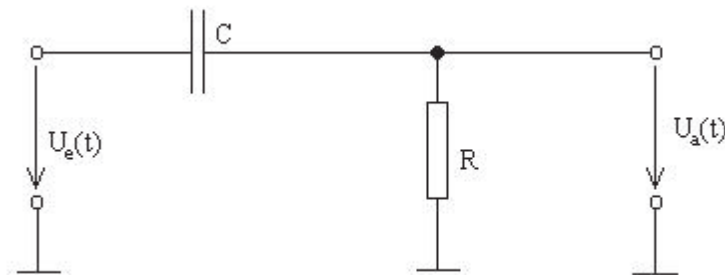


Abbildung 13: Schaltbild eines Hochpasses

Die Differentialgleichung des Hochpasses kann mit Hilfe der Knotenregel hergeleitet werden:

$$C \frac{d}{dt} (U_e - U_a) - \frac{U_a}{R} = 0 \quad (37)$$

Für kleine Frequenzen ist der Anteil von $\frac{dU_a}{dt}$ zu vernachlässigen und man stellt fest, daß für kleine Frequenzen der Hochpaß zum Differenzierer wird. Mit Hilfe der Spannungsteilergleichung erhält man für den Hochpaß folgenden Frequenzgang:

$$F_{RS}(i\omega) = \frac{U_a(i\omega)}{U_e(i\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}}$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich zu:

$$\phi_{RS}(i\omega) = \arctan \frac{1}{\omega CR}$$

1.8 Der Tiefpaß

Der Tiefpaß läßt - wie es der Name schon sagt - tiefe Frequenzen bevorzugt passieren. Aufgrund seiner Schaltung werden also hohe Frequenzen herausgefiltert und die tiefen Frequenzen werden abgegriffen. Eine gängige Schaltung für den Tiefpaß wird im folgenden Schaltbild als Reihenschaltung eines Kondensators mit der Kapazität C und eines Widerstands R realisiert.

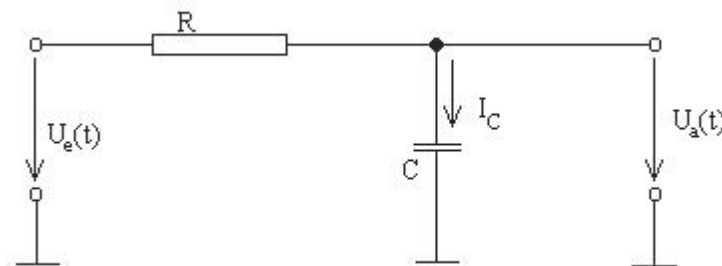


Abbildung 14: Schaltbild eines Tiefpasses

Mit Hilfe der Knotenregel ergibt sich aus dem obigen Schaubild die Differentialgleichung des Tiefpasses zu:

$$RC \frac{dU_a}{dt} + U_a - U_e = 0 \quad (38)$$

Für hohe Frequenzen kann man die Spannung U_a nahezu vernachlässigen und man erhält die Differentialgleichung bzw. die Integralgleichung des Integral-Elements. Der Tiefpaß fungiert also für hohe Frequenzen als Integrierer. Für die Erstellung des BODE-Diagramms des Tiefpasses benötigen wir die Frequenzgangsfunktion und die Phase. Diese beiden Größen lassen sich mit Hilfe der Spannungsteilergleichung ableiten:

$$F_{RS}(i\omega) = \frac{U_a(i\omega)}{U_e(i\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}}$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich zu:

$$\phi_{RS}(i\omega) = \arctan \frac{1}{\omega CR}$$

1.9 Der Operationsverstärker

Der Operationsverstärker hat folgendes Schaltsymbol:

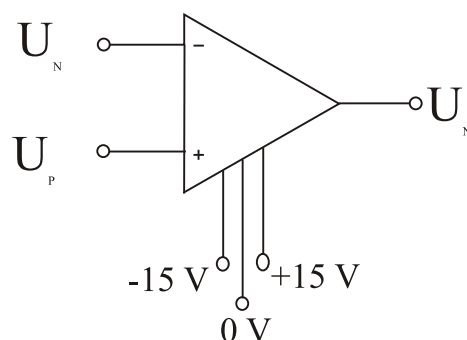


Abbildung 15: Schaltbild eines Operationsverstärkers

Die für den Verstärker erforderliche Hilfsenergie wird beim Operationsverstärker aus einer stabilisierten Stromversorgung von $\pm 15V$ bezogen. Operationsverstärker sind Differenzverstärker mit zwei Signaleingängen und einem Signalausgang. Die Eingangssignale am sogenannten invertierenden und nichtinvertierenden Eingang werden mit unterschiedlichen Vorzeichen zum Ausgang übertragen. Kennzeichnend ist, daß Eingangsspannungsdifferenzen u_d mit sehr großen Differenzverstärkungen, gleiche Eingangsspannungen mit sehr kleinen Gleichtaktverstärkungen verstärkt werden. Die Differenzverstärkung hat bei Gleichsignalen große Werte und nimmt mit wachsender Frequenz ab. Operationsverstärker haben große Eingangswiderstände und daher kleine Eingangsströme. Der Ausgangswiderstand ist im Allgemeinen sehr gering.

Für den idealen Operationsverstärker gelten folgende Forderungen:

Differenzverstärkung	∞
Gleichtaktverstärkung	0
Eingangswiderstand	∞
Eingangsstrom	0
Ausgangswiderstand	0
Ausgangsstrom	∞

1.10 Grundsaltungen des Operationsverstärkers

1.10.1 Invertierende Schaltung

Bei der invertierenden Schaltung liegt der nichtinvertierende Eingang auf Null-Potential.

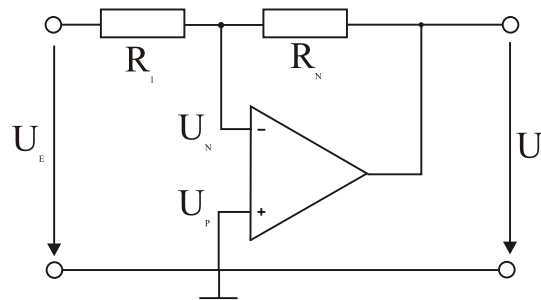


Abbildung 16: Invertierende Grundsaltung

Aus den Gleichungen für die Ströme am Summenpunkt der Schaltung erhält man für den optimalen Operationsverstärker folgende Gleichung:

$$I_0 = \frac{U_e}{R_0} = -I_1 = -\frac{U_a}{R_1}$$

Daraus ergibt sich folgende Frequenzgangfunktion:

$$F(i\omega) = \frac{U_a(i\omega)}{U_e(i\omega)} = -\frac{R_1(i\omega)}{R_0(i\omega)} \quad (39)$$

In der Konfiguration mit zwei Widerständen stellt die invertierende Grundsaltung ein Proportionalitätselement dar. Ersetzt man den Widerstand R_1 durch einen Kondensator, so erhält man ein I-Element, mit einer Spule, ein D-Element.

1.10.2 Nichtinvertierende Schaltung

Bei der nichtinvertierenden Schaltung liegt der invertierende Eingang auf Null-Potential.

Man erhält für die Nichtinvertierende Grundsaltung mit dem optimalen Operationsverstärker folgenden Frequenzgang:

$$F(i\omega) = \frac{U_a(i\omega)}{U_e(i\omega)} = 1 + \frac{R_1(i\omega)}{R_0(i\omega)} \quad (40)$$

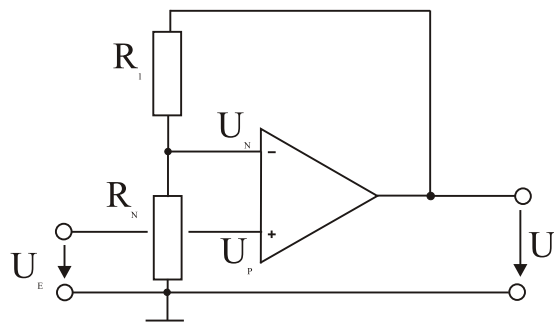


Abbildung 17: Nichtinvertierende Grundsaltung

1.11 Für den Versuch wichtige Schaltungen

Die erste Schaltung besteht aus zwei Proportionalelementen, gemäß folgender Abbildung:

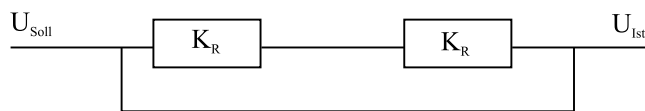


Abbildung 18: Schaltung 1

Für einen Umlauf im Schaubild erhält man:

$$(U_{Soll} - U_{Ist}) K_R K_P = U_{Ist} \quad (41)$$

Daraus folgt:

$$\frac{U_{Ist}}{U_{Soll}} = \frac{K_R K_P}{1 + K_R K_P} \quad (42)$$

Ersetzt man nun das untere P-Element durch ein Integralelement, so ist lediglich in der Gleichung K_R durch $\frac{K_R}{s}$ zu ersetzen und man erhält:

$$\frac{U_{Ist}}{U_{Soll}} = \frac{K_R K_P}{s + K_R K_P} \quad (43)$$

Für die Ersetzung des zweiten Proportionalitätselements erhält man schließlich - wiederum durch die Ersetzung $K_P \mapsto \frac{K_P}{s}$ - folgende Formel:

$$\frac{U_{Ist}}{U_{Soll}} = \frac{K_R K_P}{s^2 + K_R K_P} \quad (44)$$

Bildet man nun den Frequenzgang, so erkennt man leicht, daß dieser eine Polstelle bei $\omega^2 = K_P K_R$ aufweist:

$$\frac{U_{Ist}}{U_{Soll}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{K_R K_P}} \quad (45)$$

Außerdem erkennt man an dieser Gleichung sehr leicht, daß es sich hierbei um eine Schwingungsgleichung handelt. Es wird also mit Hilfe eines solchen Regelkreises aus zwei Integralelementen keine optimale Regelung möglich sein.

Dieses Verhalten kann dadurch behoben werden, daß parallel zum unteren Integralelement ein Proportionalelement geschaltet wird. In den Gleichungen macht sich dies durch die Ersetzung $\frac{K_R}{s} \mapsto K_N + \frac{K_R}{s}$ bemerkbar. Wir erhalten somit folgende Gleichung:

$$\frac{U_{ist}}{U_{soll}} = \frac{\frac{K_P}{s} \left(K_N + \frac{K_R}{s} \right)}{1 + \frac{K_P}{s} \left(K_N + \frac{K_R}{s} \right)} \quad (46)$$

$$= \frac{K_P (K_N s + K_R)}{s^2 + K_P (K_N s + K_R)} \quad (47)$$

Man hat nun nicht mehr eine ungedämpfte, sondern eine gedämpfte Schwingungsgleichung. Eine Regelung wird mit diesem Aufbau möglich sein.

2 VERSUCHSBESCHREIBUNG

Ziel des Versuches war es die Position eines Eisenbahnwagens optimal zu regeln. Der Eisenbahnwagen konnte sich auf einer geraden Schienenstrecke frei hin und her bewegen. Er war über ein dünnes Drahtseil mit einer Antriebseinrichtung verbunden. Diese Antriebseinrichtung wurde mit einem kleinen Motor betrieben.

Die Position des Wagens konnte mit Hilfe eines Potentiometers bestimmt werden. Dazu mußte man die Spannung am Potentiometer mit Hilfe eines Voltmeters abnehmen. Um eine absolute Positionierung zu ermöglichen, mußte der Potentiometer zuerst geeicht werden. Das Vorgehen bei dieser Eichung wird in einem der nächsten Abschnitte genauer untersucht.

Den prinzipiellen Versuchsaufbau haben wir im folgenden Bild dargestellt:

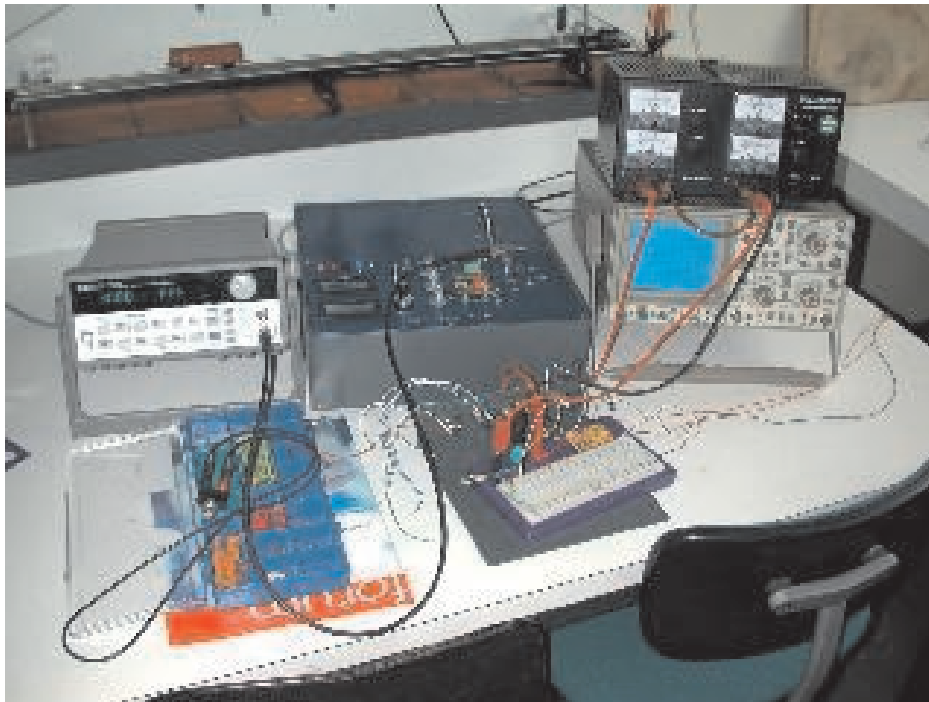


Abbildung 19: Prinzipieller Versuchsaufbau

2.1 Potentiometerkennlinie

Wie bereits in der Einleitung erwähnt mußten wir den Potentiometer, oder besser gesagt die gemessenen Spannungen dem jeweiligen Ort des Wagens zuordnen. Dazu positionierten wir den Wagen an verschiedenen Stellen des Gleises, bestimmten seine relative Position zu den Schienen und haben die Spannungsdifferenz am Voltmeter abgelesen. Nun konnte man mit Hilfe einer gemessenen Spannung am Potentiometer die Position des Wagens bestimmen.

2.2 Motorkennlinie

Um etwas über die Eigenschaften des Motors herauszufinden, ließen wir zuerst eine Motorkennlinie aufzeichnen. An den Motor legten wir eine Dreiecksspannung an. Diese legten wir dann an einem x-y-Schreiber auf der x-Achse an. An der y-Achse legten wir die Potentiometerspannung an, die ja abhängig von der jeweiligen Position des Wagens ist.

2.3 Dirac-Delta-Funktion und Sprungfunktion bei der analogen Regelung

Am ersten Versuchstag war unsere Hauptaufgabe, mit Hilfe von Operationsverstärkern, Widerständen und natürlich Kabeln, ein P-Element aufzubauen. Wir verwendeten für das P-Element die invertierende Grundschaltung des Operationsverstärkers, welche bereits im Theorieteil ausführlich beschrieben wurde. Außerdem fügten wir am Anfang und am Ende eine invertierende Schaltung hinzu. Dieser analoge Regelkreis wurde mit dem Eisenbahnwagen verbunden. Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang auf jeden Fall, daß der Motor, welcher den Wagen antreibt einen Integralanteil in den Regelkreis einbringt. Man wird also nie reines P-Verhalten bestimmen können, sondern nur eine Mischung aus Proportional und Integralanteil. Hinzu kommt noch, daß in jedem realen Regelkreis prinzipiell T_1 , T_2 und T_t Anteile vertreten sind. Um verschiedene Eingangssignale für den Regelkreis generieren zu können, wurde ein Frequenzgenerator an die fertige Schaltung angeschlossen. Wir untersuchten den Regelkreis für folgende beiden Eingangsfunktionen:

- **Dirac-Delta-Funktion:** Bei der Dirac-Delta-Funktion als Eingangssignal hat man eine besondere Situation. Da die Laplace-Transformierte der Dirac-Delta-Funktion Eins ist, kann man die Übertragungsfunktion des Regelkreises direkt als Laplace-Transformierte der Ausgangsspannung berechnen:

$$G(s) = L[U_a(t)]$$

Natürlich konnte keine echte Dirac-Delta-Funktion generiert werden. Allerdings konnte man diese Funktion durch einen hohen kurzen Eingangsspannungsspeak nachbilden.

- **Sprungfunktion:** Bei der Sprungfunktion ist der Zusammenhang nicht so einfach wie bei der Dirac-Delta-Funktion. Allerdings sind am Schaubild der Ausgangsspannung charakteristische Größen abzulesen. Auf diese Größen wird später in der Auswertung genauer eingegangen.

Die Ausgangsfunktionen des Regelkreises wurden an einen Oszilloskop sichtbar gemacht und mit Hilfe einer Digitalkamera abfotografiert. Zusätzlich notierten wir uns Spannung, Offset und Frequenz des Frequenzgenerators. Auf Basis dieser Daten wurde dann die Auswertung erstellt.

Sowohl für Sprungfunktion, als auch für die Dirac-Delta-Funktion führten wir mehrere Messungen mit verschiedenen Verstärkungen durch.

Anschließend wurde der Regelkreis um ein integrierendes Glied erweitert. Für das integrierende Glied, welches Parallel zum P-Element geschaltet wurde, verwendeten wir ebenfalls die invertierende Grundsaltung des Operationsverstärkers. Wir führten nun verschiedene Messungen mit verschiedenen Integriekonstanten sowohl für die Dirac-Delta-Funktion, als auch für die Sprungfunktion durch.

2.4 Digitale Regelung

Am zweiten Versuchstag ersetzten wir unseren analogen Regelkreis durch einen digitalen Regelkreis. Es war nun möglich die Werte für den P-Anteil, den I-Anteil und den D-Anteil beliebig zu variieren. Wir entschieden uns dafür, daß wir die gleichen Messungen des Vortages wiederholten. Grund für diese Entscheidung war die Überlegung, daß wir somit analoge und digitale Regelung vergleichen können. Im folgenden Auswertungsteil wurde dieser Vorsatz auch umgesetzt.

Das PC-Programm, welches den digitalen Regelkreis umsetzte, ermöglichte es uns außerdem, den Frequenzgenerator durch eine kleine Applikation zu ersetzen. Die Daten wurden bei diesem Versuchsteil direkt vom Programm auf der Festplatte abgespeichert.

In der zweiten Tageshälfte beschäftigten wir uns damit, die Applikation, welche den Frequenzgenerator ersetzte, so umzuprogrammieren, daß beliebige Spannungsverläufe - d.h. nicht nur gängige Verläufe wie z.B. Sprung-, Delta-, Dreiecksfunktion etc. - dem Regelkreis als Eingangssignal zur Verfügung gestellt werden konnten.