

Fortgeschrittenenpraktikum der Physik
Universität Ulm

Lichtbeugung

Sabrina Brieger
sabrina.brieger@student.uni-ulm.de

Michael-Stefan Rill
michael-stefan.rill@student.uni-ulm.de

Gruppennummer: 534

Erstabgabe am 03.02.2003

Betreuer: Nicola Maghelli

Aktuelle Version vom 1. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	2
1.1	Die Fourier-Transformation	2
1.2	Welleneigenschaften von sichtbarem Licht	3
1.2.1	Die Maxwell'schen Gleichungen	4
1.2.2	Die Wellengleichung	4
1.2.3	Lösungen der Wellengleichung	5
1.2.4	Energiedichte und Intensität einer elektromagnetischen Welle	6
1.2.5	Interferenz und Kohärenz	7
1.3	Beugung	8
1.3.1	Beugung an einem Spalt	8
1.3.2	Allgemeine Behandlung der Beugung	9
1.4	Fraktale und fraktale Dimension	10
1.5	Objekte mit gebrochener fraktaler Dimension	11
2	Versuchsbeschreibung und Auswertung	13
2.1	Spalt 1: Gepunktete Linie	14
2.2	Spalt 2: Rautenmuster	15
2.3	Spalt 3: zweidimensionaler Deltakamm	16
2.4	Spalt 4: Linie mit Kreuzen	17
2.5	Spalt 5: linienförmige Anordnung von schrägen Strichen	18
2.6	Spalt 6: rund abgeschnittener, zweidimensionaler Deltakamm	19
2.7	Spalt 7: zweidimensionaler Deltakamm mit ringförmigen Löchern	19
2.8	Spalt 8: gepunktete Sinuskurve	20
2.9	Spalt 9: Sinuskurve	20
2.10	Spalt 10: Torso einer Badenixe	21
2.11	Spalt 11: Sierpinski-Dreieck	21
2.12	Spalt 12: Penrose-Fraktal	23
2.13	Fehlerbetrachtung	23
2.13.1	Fehlerquellen bei allen Spalten	23
2.13.2	Fehler bei der Dimensionsberechnung der Fraktale	24

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Die Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation ist eine Integraltransformation der Form

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega, t) f(t) dt$$

Hierbei ist $K(\omega, t)$ der Kern der Transformation, $f(t)$ die Originalfunktion und $H(\omega)$ die Bildfunktion. Die übliche Form der Fouriertransformation entsteht aus dem Fourierintegral

$$f(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)} f(\tau) d\omega d\tau$$

dadurch, dass man

$$g(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) d\tau$$

substituiert. Für eine integrierbare Funktion $f(t)$ ohne jegliche Periodizität gilt schließlich

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

Offensichtlich nähert eine Fouriertransformation jede beliebige integrierbare Funktion mit komplexen, periodischen Exponentialfunktionen an.

Ein praktisches Beispiel veranschaulicht die Beziehung (1): Sei $f(t)$ jene Funktion, die einen physikalischen Vorgang in der Zeit beschreibt. Dann gibt die Fouriertransformierte $g(\omega)$ das Spektrum an, also welche Frequenzen mit welcher Häufigkeit auftreten.

Im Zusammenhang mit der Messtechnik ist noch der Begriff der ‘‘Faltung’’ zu erwähnen. Die Faltung ist eine Rechenregel, die es erlaubt, die Originalfunktion komplizierterer Fouriertransformierter zu berechnen. Dabei faktorisiert man die Transformierte

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{F}_1\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{F}_2\{f_2(t)\} \quad (3)$$

und bestimmt die Originalfunktionen der beiden Faktoren mit Hilfe von Tabellenwerken oder Computern.

$f(t)$ ist nun durch die zweiseitige¹ Faltung

$$f_1(t) * f_2(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4)$$

festgelegt.

Der Nachteil der Fourier-Transformation liegt darin, dass man für ihre Durchführung eine vorgegebene Funktion benötigt, die für alle reellen Zahlen definiert sein muss. In der Praxis hat man aber lediglich einzelne Messpunkte auf einem beschränkten Intervall. Um trotzdem das Spektrum zu erhalten, bedient man sich der *Fast Fourier Transformation*, kurz FFT. Dies ist eine numerische Methode, um aus einer endlichen Anzahl von Stützstellen eines Graphen die Fouriertransformierte zu erhalten. Sie zeichnet sich besonders durch ihre Schnelligkeit gegenüber anderen numerischen Methoden aus. Der Algorithmus arbeitet rekursiv und basiert auf einer Zerlegung der Stützstellen in zwei gleich große Mengen; deshalb muss die Anzahl an Stellen immer 2^n sein ($n \in \mathbb{N}$).

Im folgenden sind einige Beispiele von Fouriertransformationen aufgezählt

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \cos(\pi t) \} &= \frac{1}{2} \left[\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \right] \\ \mathcal{F} \{ \sin(\pi t) \} &= \frac{1}{2} \left[\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \right] \\ \mathcal{F} \left\{ e^{-\pi t^2} \right\} &= e^{-\pi t^2} \\ \mathcal{F} \left\{ e^{-a\pi t^2} \right\} &= \frac{1}{|a|} e^{-\frac{t^2}{a^2}} \end{aligned}$$

Hierbei ist δ die Dirac-Delta-Funktion.

1.2 Welleneigenschaften von sichtbarem Licht

Zur Beschreibung der Eigenschaften von sichtbarem Licht existieren, wie wir heute wissen, zwei gleichberechtigte Theorien. Zum einen die Quantentheorie des Lichts, die gegen Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelt wurde, und zum anderen die klassische Wellentheorie. Für Beugungsexperimente ist im wesentlichen die zweite von Bedeutung. Sichtbares Licht liegt im Wellenlängenbereich zwischen 400 nm und 750 nm . Elektromagnetische Felder werden vollständig durch die *Maxwellschen Gleichungen* charakterisiert. Sie bilden die Grundlage für alle elektromagnetischen Vorgänge und sind im folgenden dargestellt.

¹der Begriff "zweiseitig" beruht auf der Tatsache, dass die Grenzen der Integraltransformation von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen und nicht wie bei der *einseitigen* Lorentz-Transformation von 0 bis t .

1.2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho \Leftrightarrow \oint \vec{D} d\vec{A} = \int \varrho dV \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \Leftrightarrow \oint \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A} \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \Leftrightarrow \oint \vec{H} d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int \vec{D} d\vec{A} + \int \vec{j} d\vec{A} \quad (8)$$

Die jeweiligen Zusammenhänge zwischen integraler und der differentieller Form entstammen den Integralsätzen von Gauß und Stokes.

- (5) macht eine Aussage über die Quellen des D-Feldes. Diese entsprechen den elektrischen Ladungsdichten.
- An (6) erkennt man, dass das B-Feld keine Quellen oder Senken hat, d.h. alle Magnetfeldlinien sind geschlossen. Insbesondere gibt es keine magnetischen Monopole.
- Aus (7) folgt, dass eine Änderung des Magnetfelds ein elektrisches Wirbelfeld erzeugt. Dies entspricht dem Faraday-Gesetz.
- (8) sagt aus, dass ein stromdurchflossener Leiter von einem magnetischen Wirbelfeld umgeben wird. Dies ist die Aussage des Ampereschen Durchflutungsgesetzes. Da z.B. in einem Kondensator kein Strom fließt, wohl aber ein magnetisches Wirbelfeld existiert, wurde von Maxwell der Begriff des *Verschiebungsstroms* eingeführt, womit auch der Kondensator richtig beschrieben wird. Dies ist der additive Term \dot{D} .

Ebenfalls von Maxwell wurde der Zusammenhang

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (9)$$

zwischen den in der Elektrodynamik wichtigen Konstanten ε_0 (Dielektrizitätskonstante) und μ_0 (magnetische Permeabilität), sowie der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c_0 hergestellt.

1.2.2 Die Wellengleichung

Da die Maxwell'schen Gleichungen das Verhalten der elektromagnetischen Wellen vollständig beschreiben, muss sich aus ihnen auch die Wellengleichung herleiten lassen. Unter Anwendung der Materialgleichungen $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ und $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ vereinfachen sich die Maxwell-Gleichungen im

ladungs- und stromfreien Vakuum zu

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (11)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (13)$$

Durch Anwenden der Rotation auf Gleichung (12), erhält man

$$\operatorname{rotrot} \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (14)$$

Mit Hilfe der Identität $\operatorname{rotrot} = \nabla \times \nabla = \nabla \cdot \nabla - \Delta$ folgt schließlich

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (15)$$

1.2.3 Lösungen der Wellengleichung

Im Grunde wird jede Funktion, die Lösung der Wellengleichung ist, als Welle bezeichnet. Mögliche Lösungen kann man durch den Ansatz einer harmonischen Welle finden

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)} \quad (16)$$

mit der Amplitude \vec{E}_0 , dem Wellenvektor \vec{k} , der die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt, und der Kreisfrequenz ω . Bezieht man noch die Wellenlänge λ und die Phasengeschwindigkeit c mit ein, gelten folgende Gleichungen

$$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \quad (17)$$

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (18)$$

Wichtige harmonische Wellen sind

- **Ebene Wellen:** Unter einer ebenen Welle im Raum versteht man eine Welle, die zu einem bestimmten Zeitpunkt t in allen Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung jeweils eine konstante Phase besitzt. Also jede Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)} \quad (19)$$

für die gilt

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.} \quad (20)$$

- **Kugelwellen:** Kugelwellen erhalten ihre große Bedeutung durch das *Huygensche Prinzip*, nach dem jeder von einer Welle erregte Raumpunkt Ausgangspunkt einer neuen Kugelwelle ist. Um zu einer Darstellung einer Kugelwelle zu kommen, bei der die Phase auf einer Kugeloberfläche konstant ist, schreibt man die Wellengleichung zweckmäßig in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordinaten und der Tatsache, dass Kugelwellen sphärisch symmetrisch sind – d.h. sie zeigen keine Abhängigkeit von θ und ϕ –, erhält man für die Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial r^2}(\vec{r}\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{r}\vec{E}) = 0 \quad (21)$$

und als Lösung

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{r} e^{i(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)} \quad (22)$$

Die Amplitude $\frac{E_0}{r}$ fällt proportional zu $\frac{1}{r}$ ab. In großer Entfernung vom Ursprung geht die Kugelwelle lokal in eine ebene Welle über.

1.2.4 Energiedichte und Intensität einer elektromagnetischen Welle

Die Energiedichte u des elektrischen Feldes ist definiert als

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \vec{E}^* \quad (23)$$

Damit gilt für die mittlere Energiedichte

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u dt \quad (24)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \vec{E} \vec{E}^* dt \quad (25)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \langle \vec{E} \vec{E}^* \rangle \quad (26)$$

Eine wichtige charakterisierende Größe elektromagnetischer Wellen ist die Intensität I an einem Punkt P . Sie ist definiert als der mittlere Energiefluss $c \cdot \langle u \rangle$ pro Flächeneinheit an diesem Punkt

$$I = \frac{c \langle u \rangle}{A} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon c \langle \vec{E} \vec{E}^* \rangle \quad (27)$$

Häufig ist es allerdings zweckmäßig, die Intensität abgekürzt als

$$I = 2\langle \vec{E}\vec{E}^* \rangle \quad (28)$$

zu definieren, da damit die Intensität zum Quadrat des Amplitudenvektors \vec{E}_0 wird

$$I = \vec{E}_0^2 = \vec{E}_0\vec{E}_0^* \quad (29)$$

1.2.5 Interferenz und Kohärenz

Die Linearität der Wellengleichung erlaubt Superpositionen, d.h. jede Linearkombination zweier Lösungen ist wiederum eine Lösung. Die Überlagerung von Teilwellen bezeichnet man als Interferenz. Überlagert man Wellen mit gleicher Phase (Vielfache von 2π), so spricht man von konstruktiver Interferenz, da diese sich verstärken. Löschen sich die Welle gerade gegenseitig aus (ungerade Vielfache von π), bezeichnet man dies als destruktive Interferenz.

Interferieren zwei ebene Wellen gleicher Frequenz ω und Ausbreitungsrichtung \vec{k} gilt für die resultierende Welle folgende Beziehung

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (30)$$

$$= \vec{E}_{01}e^{i(\vec{k}\vec{r}+\omega t+\phi_1)} + \vec{E}_{02}e^{i(\vec{k}\vec{r}+\omega t+\phi_2)} \quad (31)$$

$$= \left(\vec{E}_{01}e^{i\phi_1} + \vec{E}_{02}e^{i\phi_2} \right) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}+\omega t)} \quad (32)$$

Man erhält also eine neue Welle mit der Amplitude $\vec{E}_{01}e^{i\phi_1} + \vec{E}_{02}e^{i\phi_2}$. Damit wird die Intensität $I = \vec{E}_{0ges}\vec{E}_{0ges}^*$ zu

$$I = \vec{E}_{01}^2e^{i(\phi_1-\phi_1)} + \vec{E}_{01}\vec{E}_{02}e^{i(\phi_1-\phi_2)} + \vec{E}_{01}\vec{E}_{02}e^{i(\phi_2-\phi_1)} + \vec{E}_{02}^2e^{i(\phi_2-\phi_2)} \quad (33)$$

$$= \vec{E}_{01}^2 + \vec{E}_{02}^2 + \vec{E}_{01}\vec{E}_{02} \left(e^{-i(\phi_2-\phi_1)} + e^{i(\phi_2-\phi_1)} \right) \quad (34)$$

$$= I_1 + I_2 + 2\vec{E}_{01}\vec{E}_{02} \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (35)$$

Der dritte Summand aus Gleichung (35) wird als Interferenzterm bezeichnet.

Um Interferenzstrukturen beobachten zu können, müssen die Wellen eine feste Phasenbeziehung besitzen. Denn falls $\Delta\phi$ beliebige Phasenwinkel zwischen 0 und 2π annimmt, mittelt sich der Interferenzterm aus (35) weg. Strahlt eine Quelle Wellen konstanter Phasenbeziehung ab, so nennt man sie *kohärent*. Tatsächlich existieren solche idealen Quellen aber nicht! Es besteht lediglich die Möglichkeit, durch bestimmte experimentelle Anordnungen zeitlich oder räumlich kohärente Wellen zu erzeugen.

Zeitliche Kohärenz beobachtet der Experimentator, wenn sich die Phasendifferenz während Δt um weniger als 2π ändert. Die maximale Zeitspanne Δt , für die dies gilt, bezeichnet man als *Kohärenzzeit*. Eine typische Anordnung zur Erzeugung zeitlich kohärenter Lichtwellen ist der Laser. Das Produkt aus Kohärenzzeit und Lichtgeschwindigkeit heißt Kohärenzlänge.

Unter *räumlicher Kohärenz* versteht man, dass sich die Phasendifferenz in einem festen Raumpunkt während der gesamten Beobachtungszeit um weniger als 2π ändert. Zur Erzeugung räumlich kohärenter Wellen verwendet man häufig den Youngschen Doppelspalt aus Abbildung 1.

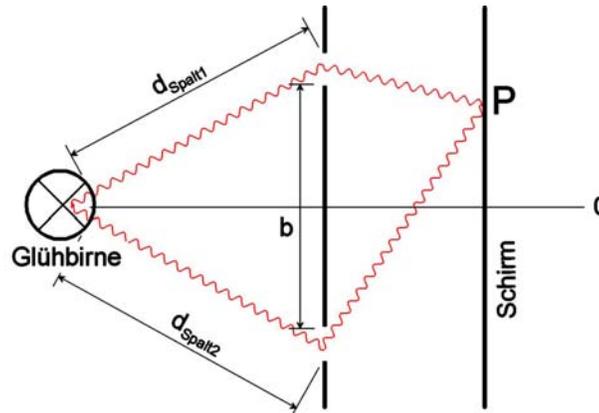


Abbildung 1: Youngscher Doppelspalt als Beispiel für Anordnungen, die räumlich kohärentes Licht erzeugen. Quelle: [4]

Die dekohärente Lichtquelle (z.B. Glühbirne) strahlt dabei einen Doppelspalt an, wobei jeder Spalt den gleichen Abstand zur Lichtquelle hat. Die beiden Spalte können nun als punktförmige Lichtquellen betrachtet werden. Wegen $d_{Spalt1} = d_{Spalt2}$ kommen die von der dekohärenten Lichtquelle verursachten Intensitätsfluktuationen gleichzeitig bei beiden Spalten an, so dass auf dem Schirm S an allen Raumpunkten P feste Intensitätsverteilungen auftreten - also Interferenzen.

1.3 Beugung

Als *Beugung* bezeichnet man in der Optik das Phänomen, dass ein Lichtbündel beim Durchgang durch begrenzende Öffnungen oder beim Vorbeigehen an Kanten nicht transmittierender Medien teilweise aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird. Man beobachtet dann Licht auch in solchen Richtungen, in die es nach der geometrischen Optik nicht gehen dürfte. Voraussetzung für Beugung ist, dass die Abmessungen des Gegenstandes in der Größenordnung der Wellenlänge des einfallenden Lichtes liegen.

1.3.1 Beugung an einem Spalt

Ein einfaches Beispiel für Beugung ist ein Lichtbündel, das auf einen Spalt der Breite $b = \overline{AB}$ fällt, wie dies in Abbildung 2 dargestellt ist.

Der Einspalt wird durch $2n$ Punktquellen repräsentiert, die nach dem Huygenschen Prinzip Wellen gleicher Amplitude emittieren ($E_1 = E_2 = \dots = E_n$). Da zwischen den entsprechenden Strahlen der oberen und unteren Hälfte des Spaltes ein Gangunterschied von jeweils $\Delta s = \frac{\lambda}{2}$ besteht, ergibt sich für die Intensitätsminima

$$\sin(\alpha)_{min} = \pm n \frac{\lambda}{b} \quad (36)$$

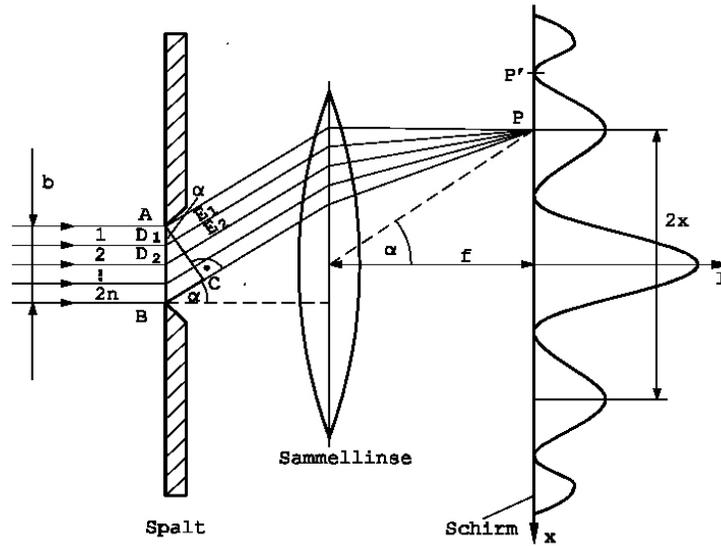


Abbildung 2: Geometrische Skizze der Beugung am Einspalt

und für die Intensitätsmaxima entsprechend

$$\sin(\alpha)_{max} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{b} \quad (37)$$

Die Breite des zentralen Maximums ($n = 0$) ist umgekehrt proportional zur Spaltbreite, was bedeutet, dass diese mit zunehmender Spaltbreite schmaler wird.

1.3.2 Allgemeine Behandlung der Beugung

Um die Intensitätsverteilung einer beliebigen Öffnung Σ in der x - y -Ebene $(x, y, 0)$ auf einem Schirm in der Ebene (X, Y, Z) zu berechnen, betrachtet man zunächst ein infinitesimales Flächenstück $d\sigma$ und eine Kugelwelle $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{|\vec{r}|} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$, die nach dem Huygenschen Prinzip von dieser Welle ausgeht. Man erhält somit für die gesamte Öffnung Σ

$$\vec{E}_{X,Y,Z} = \int_{\Sigma} \frac{\vec{E}_0(x, y, 0)}{|\vec{r}|} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\sigma \quad (38)$$

$$= \frac{1}{|\vec{R}|} \int_{\Sigma} E_0(x, y, 0) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\sigma \quad (39)$$

Mit der Relation

$$\begin{aligned} (\vec{r})^2 &= (X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 \\ &= X^2 - 2Xx + x^2 + Y^2 - 2Yy + y^2 + Z^2 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \sqrt{\vec{R}^2 - 2Xx - 2Yy} \\ &= \vec{R} \sqrt{1 - \frac{2Xx}{|\vec{R}|^2} - \frac{2Yy}{|\vec{R}|^2}} \\ &\approx \vec{R} \left[1 - \left(\frac{Xx}{|\vec{R}|^2} + \frac{Yy}{|\vec{R}|^2} \right) \right]\end{aligned}$$

und damit

$$\vec{E}_{X,Y,Z} = \frac{1}{|\vec{R}|} \int_{\Sigma} E_0(x, y, 0) e^{i\vec{k}\vec{R} \left[1 - \left(\frac{Xx}{|\vec{R}|^2} + \frac{Yy}{|\vec{R}|^2} \right) \right] - i\omega t} d\sigma \quad (40)$$

$$= \frac{e^{-i\omega t}}{|\vec{R}|} \int_{\Sigma} E_0(x, y, 0) e^{i\vec{k}\vec{R}} e^{-i \left(\frac{Xx}{|\vec{R}|^2} + \frac{Yy}{|\vec{R}|^2} \right)} d\sigma \quad (41)$$

$$= \frac{e^{i\vec{k}\vec{R} - i\omega t}}{|\vec{R}|} \int_{\Sigma} E_0(x, y, 0) e^{-i \left(\frac{Xx}{|\vec{R}|^2} + \frac{Yy}{|\vec{R}|^2} \right)} d\sigma \quad (42)$$

Bezeichnet man nun $\frac{X}{|\vec{R}|^2} = k_x$ und $\frac{Y}{|\vec{R}|^2} = k_y$ als neue Wellenvektoren, so erhält man

$$\vec{E}_{X,Y,Z} = \frac{e^{i\vec{k}\vec{R} - i\omega t}}{|\vec{R}|} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y, 0) e^{-i(k_x x + k_y y)} d\sigma \quad (43)$$

Die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ ist ohne weiteres möglich, da außerhalb von Σ keine Welle existiert. Vergleicht man (43) mit (1) so erkennt man, dass $\vec{E}_{X,Y,Z}$ im Grunde die zweidimensionale Fouriertransformierte von $E_0(x, y, 0)$ ist. Um die Intensitätsverteilung als beobachtbare Größe zu erhalten, muss (43) lediglich noch quadriert werden, da $I = \vec{E}^2$ gilt. Man kann also sagen, dass das Beugungsbild eine Fouriertransformierte des Originalbildes ist. In diesem Zusammenhang spielt auch die Faltung eine Rolle. So ergibt zum Beispiel eine Reihe von Löchern eine Faltung von Dirac-Delta-Funktionen mit den Ortsfunktionen dieser Löcher.

1.4 Fraktale und fraktale Dimension

Da der übliche Dimensionsbegriff, wie er für glatte Kurven, Flächen und Körper gebraucht wird, für Fraktale nicht anwendbar ist, müssen verallgemeinerte Definitionen der Dimension herangezogen werden.

Die Dimension δ einer Menge, wird mit Hilfe eines Maßstabes, mit dem man die Menge vermisst, ermittelt. Auf der Geraden ist ein solcher Maßstab eine Strecke der Länge l , auf der Fläche ein Quadrat der Seitenlänge l und im Raum ein Kubus der Kantenlänge l . Man nimmt diesen Maßstab, vergrößert ihn V -mal und zählt die Anzahl N , wie oft man ihn benötigt, um die

neue Menge vollständig zu überdecken. Hat man zum Beispiel eine Gerade der Länge l und verdoppelt diese zu einer Geraden mit Länge $2l$, so benötigt man den Maßstab $N=2=2^1$ mal. Betrachtet man ein Quadrat der Seitenlänge l und verdoppelt die Seitenlänge zu $2l$, so benötigt man das ursprüngliche Quadrat $N=4=2^2$ mal, um die Fläche zu überdecken. Bei einem Würfel der Kantenlänge l benötigt man nach Verdopplung der Kantenlänge auf $2l$, $N=8=2^3$ mal den Maßstabswürfel, um den Kubus auszufüllen. Die Dimension eines solchen Objektes wird dann folgendermaßen definiert

$$\delta = \frac{\log N}{\log V} \quad (44)$$

Die Dimension einer Gerade wäre demnach $\delta = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$, die einer quadratischen Fläche $\delta = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$ und die eines Würfels $\delta = \frac{\log 8}{\log 2} = 3$.

Gemäß dieser Definition existieren nun aber Objekte, für die D keine ganze Zahl, sondern eine Bruchzahl ist. Solche Objekte bezeichnet man als *Fraktale*.

1.5 Objekte mit gebrochen fraktaler Dimension

- **Cantor-Menge:** Unter einer Cantor-Menge versteht man eine Untermenge des Intervalls zwischen 0 und 1. Man schneidet aus dem Intervall das mittlere Drittel heraus, schneidet dann aus den verbleibenden Dritteln jeweils wieder deren mittleres Drittel heraus und so weiter. Versucht man diese Menge mit Maßstäben zu überdecken, so findet man für ihre Dimension $\delta = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63$.
- **Koch-Kurve:** Eine Koch-Kurve ergibt sich nach folgendem Konstruktionsprinzip: Man beginnt mit einer Strecke. Das mittlere Drittel der Strecke wird durch zwei Strecken, die einen Winkel von 60° bilden, ersetzt. Mit den sich ergebenden vier Strecken wird analog verfahren. Für die Dimension der Koch-Kurve gilt dann $\delta = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,262$.
- **Sierpinski-Dreieck:** Das Sierpinski-Dreieck² entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck durch sukzessives Entfernen der jeweiligen, um den Faktor 2 verkleinerten Dreiecke, deren Ecken die jeweiligen Seitenmittelpunkte der Dreiecke aus dem vorangegangenen Iterationsschritt sind. In jedem Iterationsschritt verringert sich die Fläche um den Faktor $\frac{3}{4}$. Die Dimension des Sierpinski-Dreiecks ist $\delta = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$.
- **Penrose-Parkett:** Eine ausgesprochen unerwartete Entdeckung begeisterte 1984 alle Festkörperphysiker und Kristallographen: Proben einer sehr schnell abgekühlten Aluminium-Mangan Legierung (Al_6Mn) kristallisierten als kleine Ikosaeder und zeigten ein Röntgenbeugungsbild mit fünfzähliger Symmetrie und ausgeprägten Maxima.

Das bedeutete, dass die Atome in dieser Legierung irgendwie mit fünfzähliger Symmetrie angeordnet sein mussten. Nun ist es mathematisch relativ leicht zu zeigen, dass eine periodische Anordnung von Atomen niemals eine derartige Symmetrie aufweisen kann! Die genaue Anordnung der Atome ist auch heute noch nicht bekannt, aber es gibt ein

²Eine Abbildung zum Sierpinski-Dreieck findet man im Abschnitt 2.11.

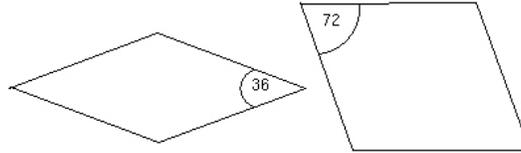


Abbildung 3: Komponenten des Penrose-Parketts. Quelle: [7]

sehr gutes Modell. In zwei Dimensionen ist das Modell verblüffend einfach und auch ästhetisch sehr ansprechend - das Penrose-Parkett³.

Ein Penrose-Parkett entsteht, wenn die beiden Kacheln aus Abbildung 3 so aneinandergelagt werden, dass die "Anlagebedingung" erfüllt ist: an jeder Kante müssen die Pfeilspitzen übereinstimmen. Durch diese Anlagebedingung ist sichergestellt, dass das entstehende Parkett eine richtige fünfzählige Rotationssymmetrie aufweist - anders als ein Kristall ist es jedoch nicht periodisch sondern quasiperiodisch.

- **Landküste:** Misst man die Länge der Küste eines Landes auf einer niedrigauflösenden Landkarte, so erhält man einen kleineren Wert als bei einer hochauflösenden Karte, die mehr der kleinen Buchten zeigt.

³Eine Abbildung zum Penrose-Parkett findet man im Abschnitt 2.12.

2 Versuchsbeschreibung und Auswertung

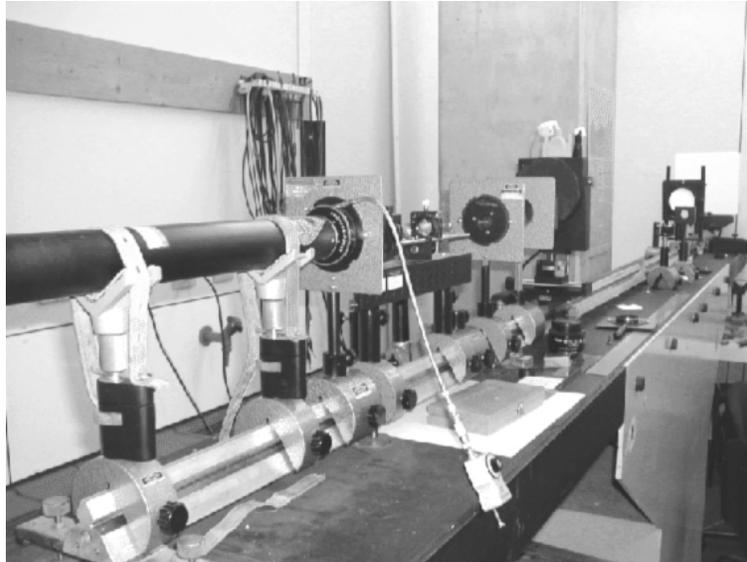


Abbildung 4: Photographie des Versuchsaufbaus zur Lichtbeugung. Quelle: [6]

Nachdem die theoretischen Tatsachen geklärt sind, will man nun versuchen die Ergebnisse experimentell zu bestätigen. Es soll also anhand verschiedener Beispiele gezeigt werden, dass das Beugungsbild eines beliebig komplex geformten Spaltes dem Quadrat der Fourier-Transformierten entspricht. Zu diesem Zweck verwendet man den Aufbau aus Abbildung 4. Hier sieht man zunächst einen relativ leistungsstarken Laser (linker Rand, ca. 3 mW), der das – in einer Halterung montierte – Beugungsobjekt bestrahlt. Nach dem Objekt befindet sich eine Konvexlinse, die das Bild auf den Sensor der CCD-Kamera fokussiert. Die CCD-Kamera sendet die gemessenen Intensitäten über eine serielle Schnittstelle an einen Computer, der eine gezielte Aufnahme und Auswertung des Beugungsbildes ermöglicht.

In den folgenden Abbildungen 5 bis 19 sieht man unsere CCD-Aufnahmen. Dabei sind die Bilder immer nach folgendem Schema sortiert:

- Links ist das ursprüngliche Bild des Spaltes dargestellt. Diese Aufnahme wurde natürlich nicht mit einem Laser gemacht, sondern mit einer handelsüblichen Glühbirne, die aufgrund ihres kontinuierlichen Farbspektrums kein scharfes Beugungsbild auf dem CCD-Sensor erzeugt. Demnach erhält man durch Beleuchtung mit dieser Glühbirne lediglich ein zum Spalt kongruentes Abbild.
- In der Mitte sieht man stets das vom Laser erzeugte Beugungsbild, das laut Herleitung in Abschnitt 1.3.2 genau dem Quadrat der Fourier-Transformierten der Spaltform entspricht. Alle Bilder wurden nachträglich mit der Bildbearbeitungssoftware Adobe Photoshop 6.01 aufgehellt.
- Rechts ist wiederum das Beugungsbild dargestellt. Jedoch wurde es im Gegensatz zum vorigen länger belichtet und die Helligkeit mit Hilfe der Bildbearbeitungssoftware Adobe

Photoshop 6.01 nachträglich erhöht. Demzufolge kann man in diesen Aufnahmen auch die lichtschwachen Beugungen am Rand erkennen, was allerdings in manchen Bildzonen Überbelichtungen zur Folge hat.

Eine mathematische Auswertung der Bilder ist sehr aufwendig und für diesen Versuch nicht sinnvoll. Um trotzdem unsere Messergebnisse mit "Literaturwerten" vergleichen zu können, werden einige einfach strukturierte Spaltmuster im Bildbearbeitungsprogramm gezeichnet und mit dem Programm Scion Image 4.0.2 beta Fourier-transformiert und invertiert. Diese gerechneten Bilder können dann den "gemessenen" Bildern gegenübergestellt werden.

2.1 Spalt 1: Gepunktete Linie

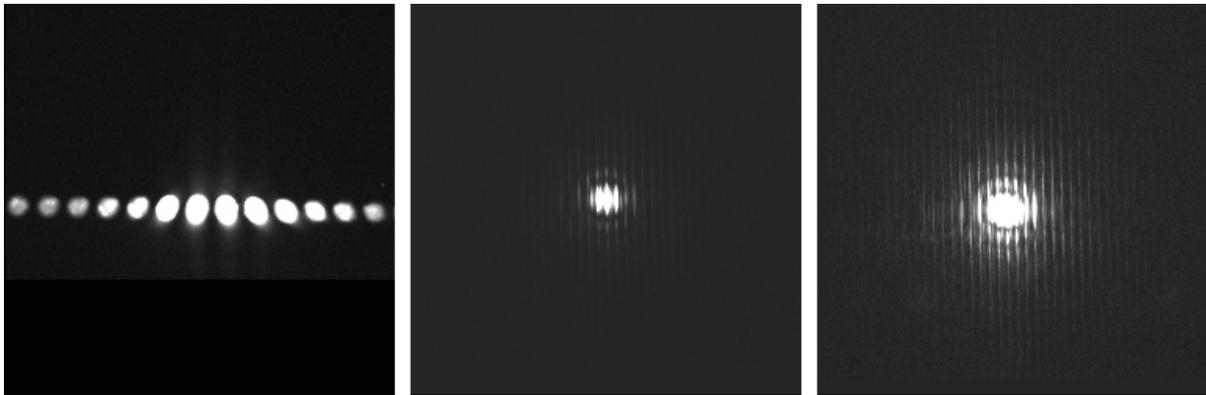


Abbildung 5: Spaltform: gepunktete Linie

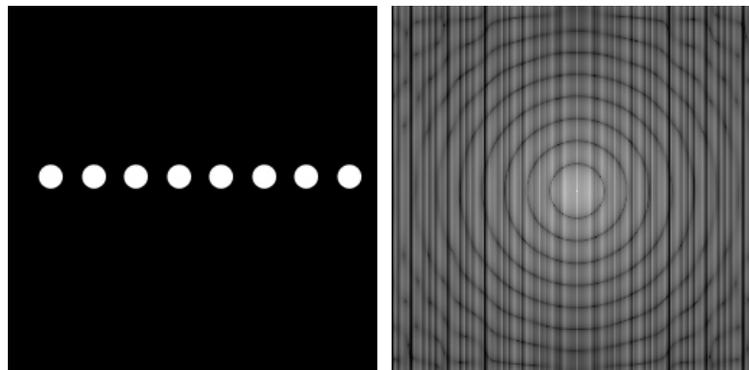


Abbildung 6: Gezeichnete Spaltform und berechnete Fourier-Transformierte der gepunkteten Linie

Als erstes Beispiel verwendeten wir einen Beugungsobjekt in Form einer gepunkteten Linie. Das Objekt kann auch als Faltung eines eindimensionalen Deltakamms mit einem kreisförmigen Loch betrachtet werden. Folglich erwarten wir auch eine entsprechende Faltung beim Beugungsbild. Vergleicht man das gerechnete Bild (Abbildung 6) mit dem gemessenen (Abbildung 5), so

erkennt man deutlich Parallelen: beide weisen kreisrunde Minima und Maxima in periodisch abwechselnder Folge auf (entspricht also dem erwarteten Beugungsbild eines kreisförmigen Lochs), die sich mit senkrecht angeordneten Linien überlagern (Beugungsbild eines Deltakamms).

2.2 Spalt 2: Rautenmuster



Abbildung 7: Spaltform: Rautenmuster

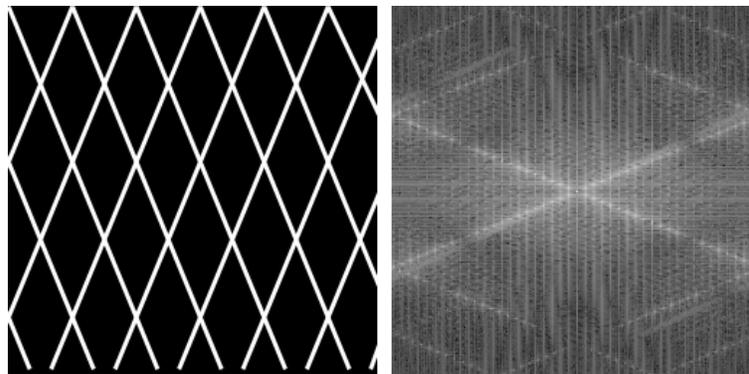


Abbildung 8: Gezeichnete Spaltform und berechnete Fourier-Transformierte des Rautenmusters

Auch bei diesem Muster erkennt man Gemeinsamkeiten von gerechnetem und gemessenem Bild. Allerdings können aufgrund von Fehlereinflüssen (näheres dazu im Abschnitt 2.13) beim gemessenen Bild nicht so viele feine, intensitätsschwache Strukturen aufgelöst werden wie in Abbildung 8.

2.3 Spalt 3: zweidimensionaler Deltakamm

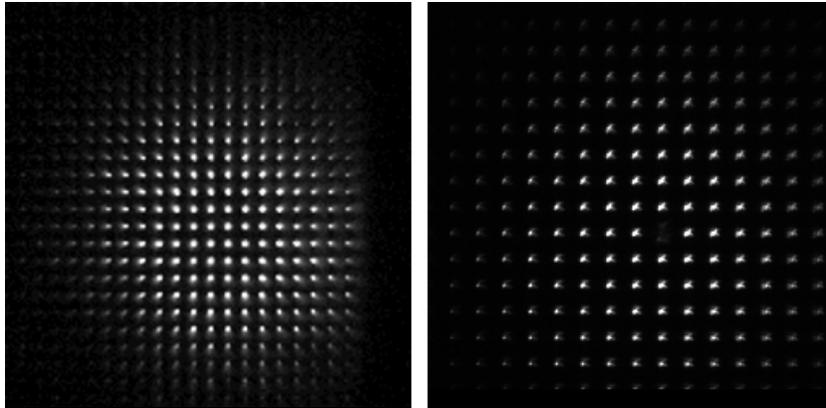


Abbildung 9: Spaltform: zweidimensionaler Deltakamm

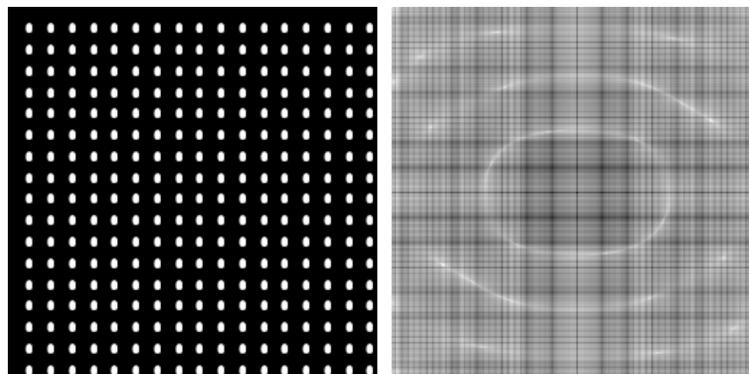


Abbildung 10: Gezeichnete Spaltform und berechnete Fourier-Transformierte des zweidimensionalen Deltakamms

Bei diesem regelmäßigen Spaltnuster kann man schon vor der Messung einige Aussagen treffen. Das Muster entspricht offensichtlich der Faltung eines zweidimensionalen Deltakamms mit einem runden Loch. Bekanntlicherweise ist die Fourier-Transformierte eines Deltakamms wiederum ein Deltakamm. Und die Fouriertransformierte eines kreirunden Lochs sind ringförmig abwechselnde Intensitätsmaxima und -minima. Demnach erwarten wir eine Überlagerung dieser Beugungsbilder.

Leider erkennt man den Beugungsanteil des runden Lochs nur auf dem gerechneten Bild. Auffällig ist aber bei allen Beugungsbildern das Beugungsminimum im Zentrum.

2.4 Spalt 4: Linie mit Kreuzen

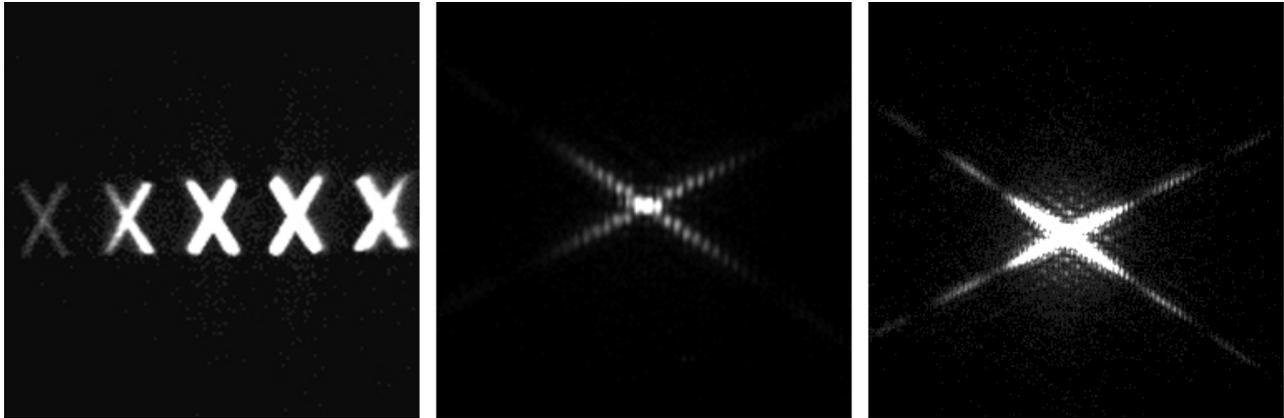


Abbildung 11: Spaltform: Linie mit Kreuzen

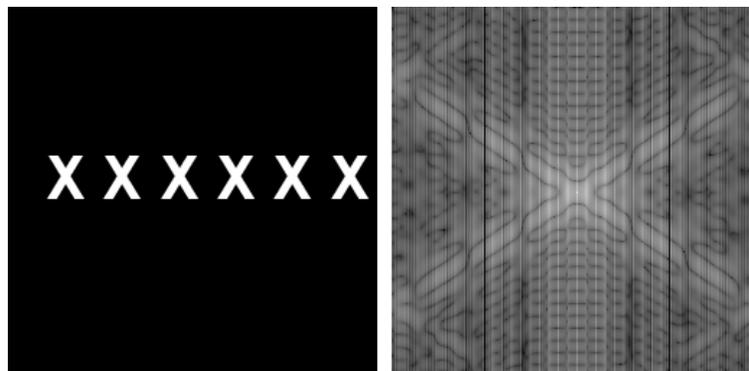


Abbildung 12: Gezeichnete Spaltform und berechnete Fourier-Transformierte der Linie mit Kreuzen

Zu diesem Beugungsobjekt kann man nur schwer etwas voraussagen. Lediglich Gemeinsamkeiten von gerechnetem und gemessenem Bild fallen auf und das gerechnete Bild zeigt erwartungsgemäß eine feinere Strukturierung.

2.5 Spalt 5: linienförmige Anordnung von schrägen Strichen



Abbildung 13: Spaltform: linienförmige Anordnung von schrägen Strichen

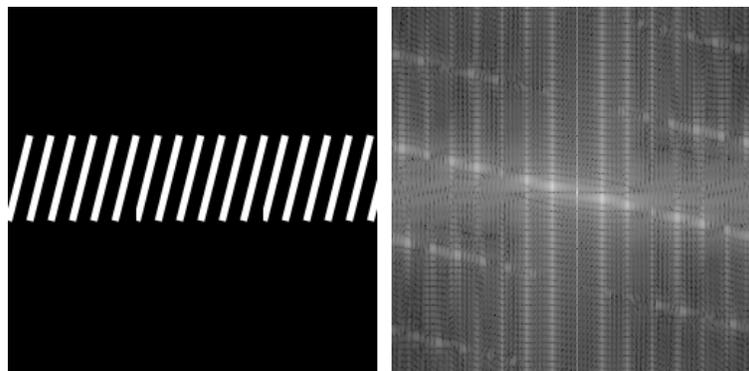


Abbildung 14: Gezeichnete Spaltform und berechnete Fourier-Transformierte der linienförmige Anordnung von schrägen Strichen

2.6 Spalt 6: rund abgeschnittener, zweidimensionaler Deltakamm

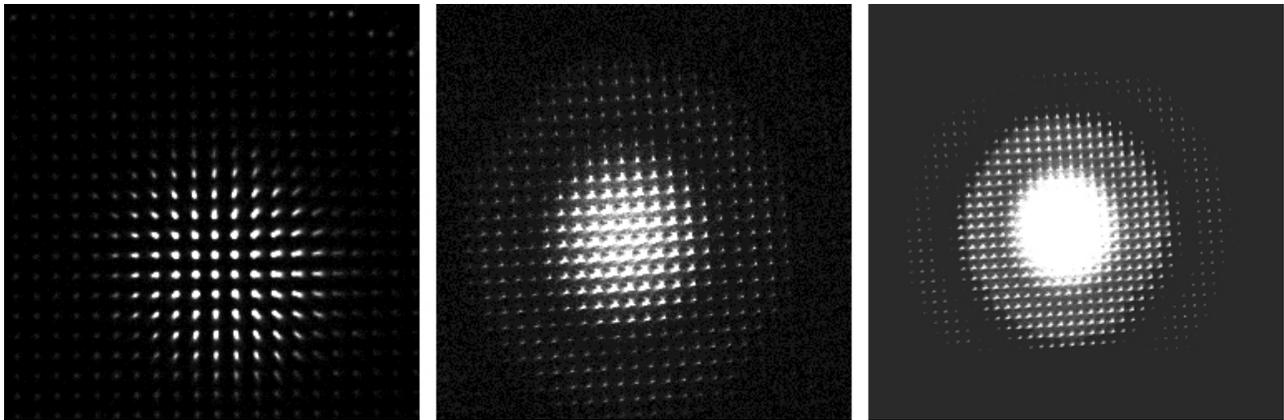


Abbildung 15: Spaltform: rund abgeschnittener, zweidimensionaler Deltakamm

2.7 Spalt 7: zweidimensionaler Deltakamm mit ringförmigen Löchern

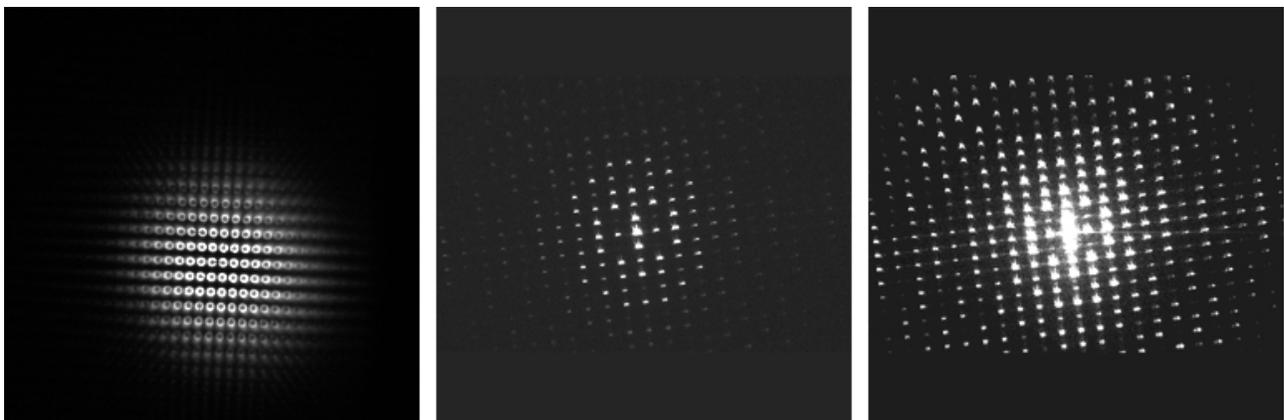


Abbildung 16: Spaltform: zweidimensionaler Deltakamm mit ringförmigen Löchern

Aufgrund der hohen Komplexität dieser Beugungsobjekte wird hier und in den folgenden Teilabschnitten auf computergenerierte Vergleichsabbildungen verzichtet.

2.8 Spalt 8: gepunktete Sinuskurve

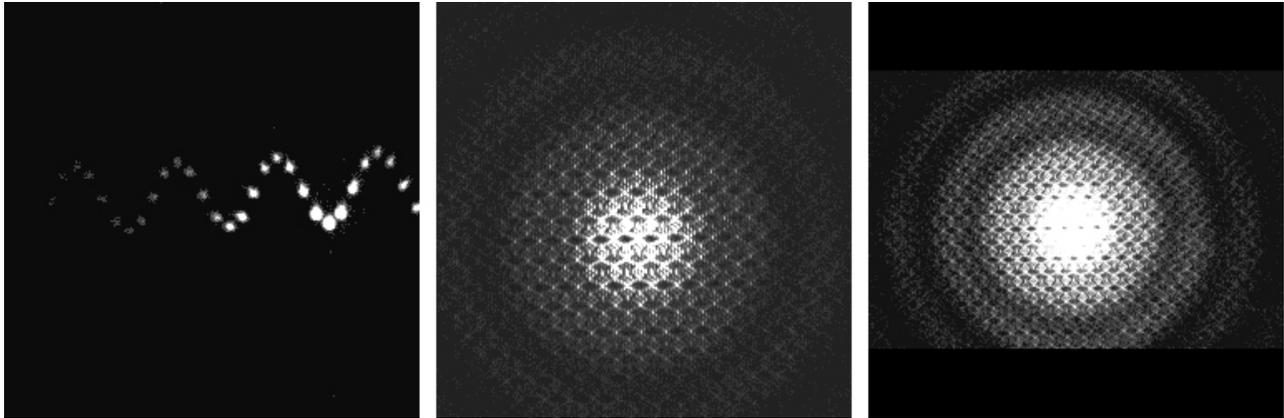


Abbildung 17: Spaltform: gepunktete Sinuskurve

2.9 Spalt 9: Sinuskurve

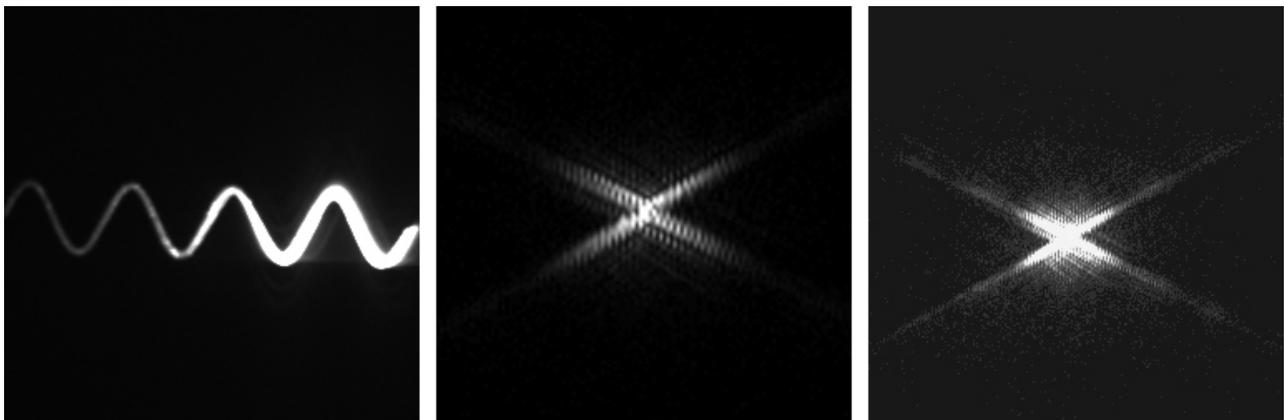


Abbildung 18: Spaltform: Sinuskurve

2.10 Spalt 10: Torso einer Badenixe

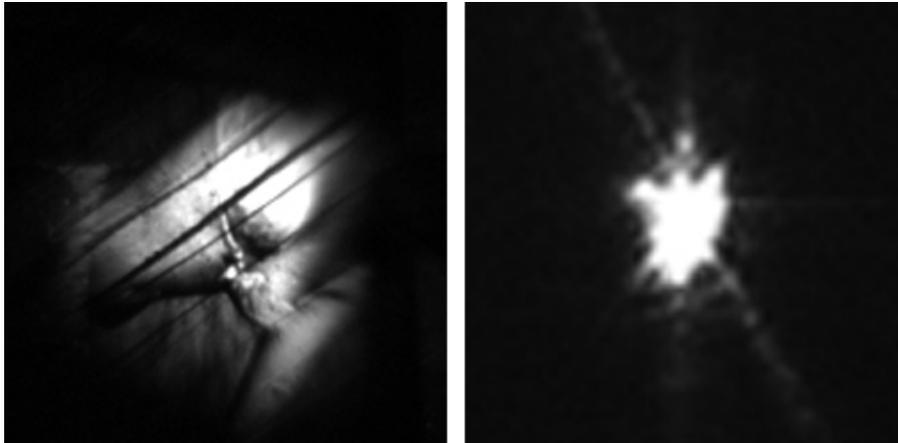


Abbildung 19: Spaltform: Torso einer Badenixe

Leider ist das Beugungsbild nicht so spektakulär wie das Spaltbild!

2.11 Spalt 11: Sierpinski-Dreieck

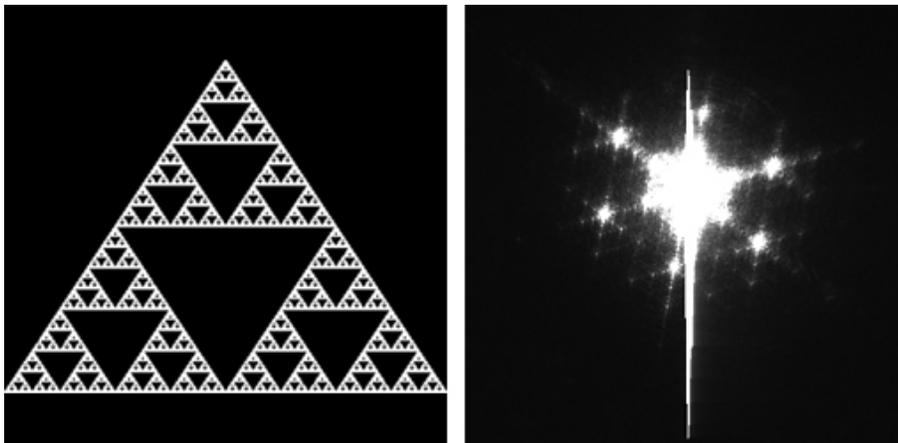


Abbildung 20: Spaltform: Sierpinski-Dreieck-Fraktal

Wie bereits in Abschnitt 1.4 erwähnt, kann das Beugungsbild eines Fraktals zur Bestimmung der Dimension herangezogen werden. Zunächst soll dies am Beispiel des Sierpinski-Dreieck-Fraktals gezeigt werden. Dazu nimmt man analog zu den vorigen Spalten das Beugungsbild auf und wertet es mit dem Programm FERImage aus. In Abbildung 21 sieht man das erzeugte Polar-Variogramm und die errechneten Parameter, die zur Bestimmung der Dimension des Fraktals verwendet werden können.

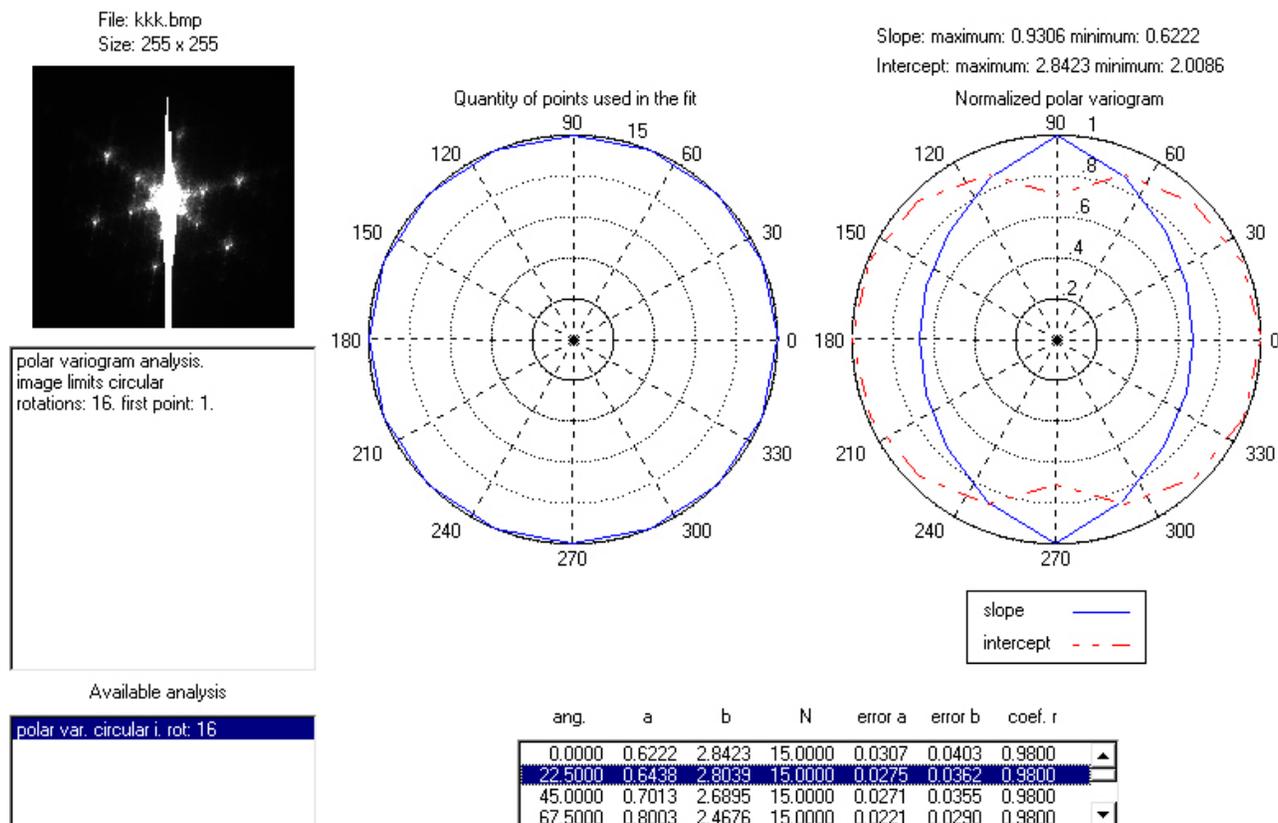


Abbildung 21: Erzeugung eines Polar-Variogramms des Sierpinski-Fraktals mit dem Programm FERImage. Unter Zuhilfenahme der errechneten Parameter kann – im Rahmen der Messgenauigkeit – die Dimension des Fraktals bestimmt werden.

FERImage errechnet für den Mittelwert des Parameters $\langle a \rangle = 0,7267225$. Mit der Beziehung

$$\text{Dimension d. Fraktals } \delta = 2 - \frac{\langle a \rangle - 1}{2} \quad (45)$$

ergibt sich für die Dimension δ des Sierpinski-Fraktals

$$\delta = 2,1366$$

Der Literaturwert für die Dimension des Sierpinski-Dreiecks wird in Abschnitt mit $\delta = 1,585$ angegeben. Die prozentuale Abweichung unseres Messwerts vom Literaturwert beträgt somit 35%. Der Grund für diese relativ hohe Abweichung wird durch die gleichen Fehler wie bei den anderen Beugungsspalten verursacht. Näheres dazu findet man in Abschnitt 2.13.

2.12 Spalt 12: Penrose-Fraktal

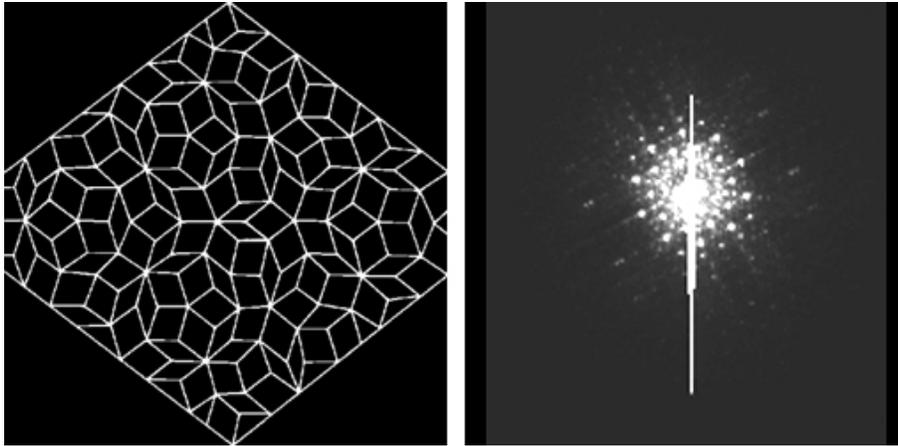


Abbildung 22: Spaltform: Penrose Fraktal

Beim Penrose-Fraktal wird die gleiche Dimensionsanalyse wie beim Sierpinski-Dreieck durchgeführt. Hier ergibt sich für die Dimension δ des Fraktals

$$\begin{aligned}\langle a \rangle &= 0,61897375 \\ \Rightarrow \delta &= 2 - \frac{\langle a \rangle - 1}{2} = 2,1905\end{aligned}$$

2.13 Fehlerbetrachtung

2.13.1 Fehlerquellen bei allen Spalten

Beim Vergleich von gerechneten und gemessenen Bildern fällt immer wieder auf, dass zwar die intensitätsstarken Grundstrukturen übereinstimmen, jedoch kleinere Maxima aufbaubedingt “verschluckt” werden. Im folgenden sind nun mögliche Fehlerquellen aufgelistet:

Ausleuchtung des Spaltbildes (1): Der wohl größte Fehler dieses Versuchs ist rein technischer Natur. Da der Laserstrahl relativ zum Spaltbild einen kleinen Durchmesser hat, wird nur ein kleiner Ausschnitt des gesamten Spalts ausgeleuchtet. Bei der theoretischen Betrachtung geht man hingegen von einem unendlich ausgedehnten Spaltbild aus! Aufgrund dieser Tatsache werden die höheren Ordnung der Fourierentwicklung (das entspricht der Beugung) abgeschnitten, so dass feinere Strukturen nicht sichtbar sind.

Ausleuchtung des Spaltbildes (2): Ein ähnlicher Fehler entsteht durch die Gauß-förmige Intensitätsverteilung des Laserstrahls. Dies führt zu einer unregelmäßigen Ausleuchtung des Spaltbildes (siehe Messbilder), was zu Informationsverlusten bei der Beugung (Fourier-Transformation) führt und folglich die feinen Strukturen – die bei den gerechneten Bildern sichtbar sind – verblassen lässt.

Sphärische Abberation und Astigmatismus durch verwendete Konvexlinse: Bei der sphärischen Abberation werden achsenferne Lichtstrahlen durch die verwendete Linse stärker gebrochen als achsennahe. Ihr Brennpunkt liegt näher bei der Linsenhauptebene. Der Astigmatismus beruht auf verschiedenen Krümmungen der Linsengrenzfläche. Bei zwei Krümmungsradien gibt es zwei Brennpunkte. Dieser Fehler tritt auch auf, wenn das Lichtbündel schräg auf eine perfekt geschliffene Linse trifft. Durch beide möglicherweise vorhandenen Linsenfehler kann das Beugungsbild nicht richtig auf den CCD-Sensor fokussiert werden, was zu leicht verschwommenen Aufnahmen führt.

Auflösungsbedingter Informationsverlust durch CCD-Kamera: Ein weiterer, wenn auch kleiner Fehler entsteht durch das endliche Auflösungsvermögen der digitalen CCD-Kamera, die nicht alle geometrisch kleineren Maxima detektieren kann.

Streulicht-Einflüsse: Ein Fehler, der bei nahezu jeder optischen Messung auftritt, ist der Streulicht-Einfluss. Obwohl in allen Versuchsteilen in einem absolut dunklen Labor gearbeitet wurde, kann z.B. durch das vom PC-Monitor erzeugte Licht das Beugungsbild beeinflussen. Allerdings scheint diese Fehlerquelle recht gering zu sein, da eine Testmessung sogar mit eingeschalteter Tischlampe durchgeführt wurde und sich kaum von der Messung im absolut dunklen Raum unterscheidet hat.

2.13.2 Fehler bei der Dimensionsberechnung der Fraktale

Natürlich beeinträchtigen die obigen Fehler auch die Dimensionsanalyse der Fraktale. Darüber hinaus gibt es noch einige spezifische, versuchsbezogene Fehlerquellen:

Endliche Auflösung des Fraktal-Spaltbildes: Der theoretische Wert für die Dimension des Fraktals setzt die Tatsache voraus, dass sich das Fraktal in einem beliebig kleinen Ausschnitt unendlich oft wiederholt. Das ist praktisch natürlich nicht zu bewerkstelligen; es existiert also im Fall des Sierpinski-Dreiecks ein "kleinstes Dreieck", was zu einem Abschneiden der höheren Glieder bei der Fourier-Entwicklung (Beugungsvorgang) führt.

Diskrete Analyse der Beugungsbilder: Wie bereits erwähnt, werden die Beugungsbilder der Fraktale mit dem Programm FERImage analysiert. Wie jede computergestützte Bildanalyse erfolgt auch diese durch diskrete Reihenentwicklungen bis zum n-ten Glied und ist nicht im mathematischen Sinne analytisch. Dadurch wird das ohnehin informationsverarmte Beugungsbild noch grober.

Literatur

- [1] Demtröder, Wolfgang: *Experimentalphysik 2*; 2. Auflage, Springer, 1996
- [2] Stöcker, Horst: *Taschenbuch der Physik*; 3. Auflage, Harry Deutsch, 1994
- [3] Tipler, Paul A.: *Physik*; 3. Auflage, Spektrum, 1994
- [4] Brieger / Rill: *Michelson-Interferometer als Fourier-Spektrometer*; FP-Protokoll, April 2002
- [5] Brieger / Rill: *Holographie*; FP-Protokoll, November 2002
- [6] FP-Versuchsbeschreibung; Universität Ulm
<http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/fortgeschrittenenpraktikum/fp/node8.html>
- [7] Hendrich, Norman: *Das Penrose Parkett*;
<http://tech-www.informatik.uni-hamburg.de/Personal/hendrich/penrose/penrose.html>