

Grundpraktikum der Physik



Versuch 9: Longitudinale Schallwellen in Metallen und Gasen

Konrad Steible Anne Götz

07. Oktober 2005

1.Abgabe: 14. Oktober 2005

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Theoretische Grundlagen | 3 |
| 1.1 | Wellen | 3 |
| 1.1.1 | Die allgemeine Wellengleichung | 3 |
| 1.1.2 | Definitionen und Begriffe | 4 |
| 1.1.3 | Wellentypen | 5 |
| 1.1.4 | Wellenformen | 5 |
| 1.2 | Dispersion - Phasen und Gruppengeschwindigkeit | 6 |
| 1.3 | Interferenz und Superpositionsprinzip | 7 |
| 1.4 | Die eindimensionale stehende Welle | 8 |
| 1.4.1 | Reflexion zwischen zwei festen Enden | 9 |
| 1.4.2 | Reflexion zwischen einem losen und einem festen Enden | 9 |
| 1.5 | Schallgeschwindigkeit im idealen Gas | 9 |
| 1.5.1 | Zustandsgleichungen idealer Gase | 9 |
| 1.5.2 | Adiabatische Zustandsgleichung | 11 |
| 1.5.3 | Cp und Cv bei Gasen | 12 |
| 1.5.4 | Herleitung der Schallgeschwindigkeit im idealen Gas | 16 |
| 1.6 | Schallgeschwindigkeit in Festkörpern | 19 |
| 2 | Versuchsbeschreibung | 21 |
| 2.1 | Messmethoden des Oszilloskops, FOURIER-Analyse | 21 |
| 2.2 | Quincke'sches Resonanzrohr | 22 |
| 2.3 | Longitudinale Schallwellen in Metallstäben | 24 |
| 2.3.1 | Metallstab mit einer Halterung | 24 |
| 2.3.2 | Metallstab mit zwei Halterungen | 25 |
| 3 | Versuchsauswertung | 26 |
| 3.1 | Quincke'sches Resonanzrohr | 26 |
| 3.1.1 | Luftfüllung | 27 |
| 3.1.2 | CO ₂ -Füllung | 27 |
| 3.2 | Longitudinale Schallwellen in Metallstäben | 28 |
| 3.2.1 | Metallstab mit einer Halterung | 29 |
| 3.2.2 | Metallstab mit zwei Halterungen | 29 |
| 4 | Fehlerdiskussion | 30 |
| 4.1 | Das Oszilloskop | 30 |
| 4.2 | Das Resonanzrohr | 30 |
| 4.3 | Die Metallstäbe | 31 |
| 5 | Literaturverzeichnis | 32 |

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Wellen

1.1.1 Die allgemeine Wellengleichung

Breiten sich Schwingungen im Raum aus, so nennt man dies eine Welle. Sie bewegen sich periodisch und transportieren dabei Energie und Impuls. Dies ist die wohl charakteristischste Eigenschaft einer Welle.

In mechanischen Wellen wird stets Masse bewegt, d.h. die Teilchen schwingen um ihre Gleichgewichtslage, im Gegensatz zu elektromagnetischen Wellen, die sich auch durch den "leeren" Raum fortpflanzen können. Beispiele für mechanische Wellen sind Wasserwellen, Schallwellen, oder andere Druckwellen in festen, flüssigen oder gasförmigen Medien.

Damit die Ausbreitung einer Welle funktioniert, müssen Kopplungen zwischen den einzelnen Schwingern vorhanden sein. Je stärker die einzelnen Kopplungen zwischen den Schwingern sind, desto höher ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Auch die Masse der schwingenden Systeme spielt hier eine große Rolle.

Die häufig dargestellte und verwendete Sinuswelle ist nur ein Spezialfall einer großen Zahl verschiedener Wellentypen. Sinnvoll ist jedoch eine allgemeine Darstellung beliebiger sich in x-Richtung ausbreitender Wellen.

Bei der allgemeingültigen dreidimensionalen Wellengleichung, der sogenannten **d'Alembert-Gleichung**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \quad (1)$$

ist die zweite Ableitung nach der Zeit proportional zur zweiten Ableitung nach dem Ort. Sie breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit c aus.

Alle Lösungen dieser Gleichung ergeben mögliche Wellen, die alle sowohl orts- als auch zeitabhängig sind. Durch spezielle Randbedingungen werden ganz bestimmte Lösungen spezieller Wellen herausgesucht.

Sie müssen nicht unbedingt harmonisch oder periodisch sein, auch einmalige Pulse können Lösungen dieser Wellengleichung sein.

Die Lösungen haben alle die allgemeine Form:

$$s(x, t) = f(kx - \omega t) + g(kx + \omega t) \quad (2)$$

oder in komplexer Schreibweise:

$$s(x, t) = s_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad (3)$$

Wie man sehen kann handelt es sich also immer um eine Funktion der Ortes und der Zeit.

1.1.2 Definitionen und Begriffe

Bewegt man sich mit einer Welle so mit, dass man zum Beispiel immer in einem Wellental (Minimum) sitzt, muss die so genannte **Phase** ($\omega t - kx$) immer konstant sein. Es muss demnach gelten:

$$kx - \omega t = \text{const.} \quad (4)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0 \quad (5)$$

$$\rightarrow \omega - k \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (6)$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_{Ph} = \lambda \cdot f = \text{const.} \quad (7)$$

Dies ist nun die Phasengeschwindigkeit einer Welle. Sie ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein bestimmter Zustand der Wellen im Raum fortbewegt.

Die **Wellenzahl** k ist im Betrag definiert als:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (8)$$

Die Wellenzahl hat gewöhnlich vektoriellen Charakter und wird auch als Wellenvektor bezeichnet. Er kennzeichnet die Ausbreitungsrichtung der Welle.

Die **Wellenlänge** λ ist die räumliche Periode der Welle. Eine Änderung von x um den Betrag λ verändert das Ergebnis der Wellengleichung nicht.

Parallel dazu gibt es die zeitliche Periode der Wellen, die **Periodendauer** T .

Die Inverse der Periodendauer wird als **Frequenz** f bezeichnet. Sie gibt die Zahl der Wellen pro Zeiteinheit an. Es gilt folgende Beziehung:

$$f = \frac{1}{T} \quad (9)$$

Da häufig auch die **Winkelgeschwindigkeit** ω verwendet wird, ist folgende Gleichung zur Verknüpfung mit der Periodendauer und der Frequenz sinnvoll:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \quad (10)$$

1.1.3 Wellentypen

Im Grunde unterscheidet man zwischen zwei verschiedene Ausbreitungsarten von Wellen: Bei der **Longitudinalwelle** bewegen sich die schwingenden Masseteilchen des Mediums in der selben Richtung, wie auch die Welle selbst.

Ist die mechanische Auslenkung der Teilchen aus ihrer Gleichgewichtslage senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle, so handelt es sich um eine **Transversalwelle**.

Im Gegensatz zu Longitudinalwellen sind Transversalwellen nur in Flüssigkeiten als Oberflächenwellen und in Festkörpern möglich. Elektromagnetische Wellen sind wie auch Licht Transversalwellen, die sich auch im Vakuum ausbreiten können.

1.1.4 Wellenformen

Die verschiedenen Wellenformen hängen davon ab, welchen zeitlichen Verlauf die Erregungsschwingung am Sender hat und welche physikalischen Größen im Speziellen durch die Wellengleichung beschrieben werden.

Die **harmonische Welle** ist die einfachste Form einer Welle.

Sie wird im eindimensionalen Fall meist durch eine sinusförmige Gleichung beschrieben:

$$s(x, t) = \hat{s} \cdot \sin(kx \pm \omega t) \quad (11)$$

doch auch

$$s(x, t) = \hat{s} \cdot \cos(kx \pm \omega t) \quad (12)$$

$$s(x, t) = \hat{s} \cdot e^{i(kx \pm \omega t)} \quad (13)$$

sind Lösungen der allgemeinen Wellendifferenzialgleichung.

Hat eine Welle im Raum und in der Zeit kein Anfang und kein Ende, wird sie idealisiert als harmonische Welle bezeichnet. Dies tritt in der Natur natürlich nie auf, da jede Welle einen Ursprung hat.

Des weiteren differenziert man zwischen **Ebenen Wellen**, **Kreiswellen** und **Kugelwellen**.

Von allen dreidimensionalen Wellen breitet sich nur die ebene Welle mit unveränderter Form im dispersionsfreien Medium aus. Bei einer ebenen Welle liegen die Orte gleicher Phase, die sogenannten Wellenfronten alle in einer Ebene. Sie sind senkrecht zum Wellenvektor \vec{k} .

Dies setzt voraus, dass für den Ortsvektor \vec{r} eines Punktes in einer solchen Ebene immer gelten muss: $\vec{k} \cdot \vec{r} = const.$

Die Darstellung der ebenen Welle ist dann folglich:

$$s(x, t) = \hat{s} \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}) - (\omega t)} \quad (14)$$

wobei die Amplitude der Welle durch \hat{s} gegeben ist.

Haben die Wellenfronten einen kreisförmigen Verlauf, so spricht man von Kreiswellen. Erweitert man dies nun auf alle drei räumliche Dimensionen, so ergeben sich die Kugelwellen.

Ihre Phasenflächen sind Kugelflächen, die senkrecht auf den radialen Ausbreitungsrichtungen stehen.

Man stellt Kugelwellen mit Hilfe von kugelsymmetrischen Funktionen $f(r)$ dar:

$$s(x, t) = f(r) \cdot \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (15)$$

1.2 Dispersion - Phasen und Gruppengeschwindigkeit

Aufgrund der in (1.1.2.) angeführten Relation (7) ist bei manchen Wellentypen die Phasengeschwindigkeit der Welle abhängig von der Wellenlänge λ . Man bezeichnet dieses Phänomen als **Dispersion**.

Die Beziehung zwischen der Phasengeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit bzw. der Wellenlänge nennt man auch **Dispersionsrelation**:

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k} \quad (16)$$

Betrachtet man eine beliebige Störung, die sich in x-Richtung ausbreitet, so lässt sie sich nach dem FOURIER-Theorem (siehe Versuchsbeschreibung) als Superposition von unendlich vielen harmonischen Wellen darstellen.

Man nennt eine solche Superposition unendlich vieler harmonischer Wellen mit Frequenzen ω im Intervall $\omega_m \pm \frac{\Delta\omega}{2}$ eine Wellengruppe. Charakterisiert wird die **Wellengruppe** durch die Amplitudenverteilung $A(\omega)$ und durch die so genannte Mittenfrequenz ω_m .

Zwar kann die Phasengeschwindigkeit der einzelnen Frequenzkomponenten verschieden sein, jedoch ist die Gruppengeschwindigkeit v_G der Wellengruppe konstant. Sie steht für die Geschwindigkeit, mit der sich das Maximum einer Wellengruppe in x-Richtung ausbreitet und folgt der Relation:

$$v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk} \quad (17)$$

(Ist die Phasengeschwindigkeit verschieden von der Gruppengeschwindigkeit, bzw. ist die Phasengeschwindigkeit abhängig von der Wellenlänge, so spricht man von Dispersion!)

Die Welle, die sich aus der Überlagerung vieler anderen Wellen ergibt, nennt man die **Schwebungswelle**. Sie pflanzt sich mit der Phasengeschwindigkeit fort. Ihre **Einhüllende** dagegen mit der Gruppengeschwindigkeit.

Nimmt man beispielsweise aus der Wellengruppe zwei Wellen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 und den gleichen Amplituden $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = \hat{s}$ so ergibt sich aus den beiden Wellen:

$$s_1(x, t) = \hat{s}_1 \cdot \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad (18)$$

$$s_2(x, t) = \hat{s}_2 \cdot \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (19)$$

die Superposition:

$$s(x, t) = 2\hat{s} \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cdot \cos(\omega_m t - k_m x) \quad (20)$$

Die Schwebungswelle hat die so genannte Mittenfrequenz $\omega_m = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$ und die dazugehörige Wellenzahl $k_m = \frac{(k_1 + k_2)}{2}$ und deren Einhüllende die Frequenz $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}$ und die Wellenzahl $\frac{\Delta k}{2} = \frac{(k_1 - k_2)}{2}$.

1.3 Interferenz und Superpositionsprinzip

Zuerst zum **Superpositionsprinzip**:

Dies besagt, dass sich zwei gleichartige Wellenfelder additiv überlagern. Wird ein Körper also zu mehreren Schwingungen angeregt, so überlagern sich diese unabhängig voneinander, d.h. ohne sich gegenseitig zu beeinflussen:

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_1(\vec{r}, t) + \xi_2(\vec{r}, t) \quad (21)$$

Dies folgt direkt aus der Linearität der Wellendifferenzialgleichung. Bei diesem Prinzip passiert nichts anderes, als das man die Auslenkung aller Teilchen an jedem Ort der Überlagerungswelle (Superposition) zu einer resultierenden Amplitude addiert.

Bei der Überlagerung von Wellen hat man hierfür einen eigenständigen Begriff eingeführt: Die **Interferenz**.

Man unterscheidet zwei Arten von Interferenz:

- **Konstruktive Interferenz**

Wellen gleicher Kreisfrequenz und gleicher Phase überlagern sich so, dass sie sich maximal verstärken

- **Destruktive Interferenz**

Die Wellen haben zwar die gleiche Kreisfrequenz, jedoch eine Phasenverschiebung $\varphi = \pi$ Sie schwächen sich dadurch maximal ab und können sich sogar auslöschen.

1.4 Die eindimensionale stehende Welle

Werden laufende Wellen in geeigneter Form überlagert, so kann es zu der besonderen Situation eines **räumlich stationären Schwingungsmusters** kommen. Im Unterschied zur laufenden Welle, bei der sich die Minima und Maxima mit der Phasengeschwindigkeit ausbreiten, bleiben sie bei der stehenden Welle immer am selben Ort.

Meist tritt dieser spezielle Fall bei der Reflexion an einer Ebene oder einem Körper ein. Das entstehende Muster hängt von der Frequenz der Wellen und den Randbedingungen (der Phase und der Amplitude) der Wellen ab.

Um eine stehende Welle durch Superposition zu erreichen müssen folgende Voraussetzungen gelten:

Die beiden Einzelwellen:

$$f(x, t) = f_0 \cdot e^{i(k_f x - \omega_f t)} \quad (22)$$

$$g(x, t) = g_0 \cdot e^{i(k_g x - \omega_g t)} \quad (23)$$

mit:

$$\omega_f = \omega_g \quad (24)$$

$$k_f = -k_g \quad (25)$$

$$f_0 = g_0 \quad (26)$$

werden zur Überlagerung gebracht. Es entsteht eine stehende Welle:

$$s(x, t) = f(x, t) + g(x, t) \quad (27)$$

$$\Rightarrow s(x, t) = f_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} + f_0 \cdot e^{i(-kx - \omega t)} \quad (28)$$

$$= f_0 [e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t} + e^{-ikx} \cdot e^{-i\omega t}] \quad (29)$$

$$= f_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot [e^{ikx} + e^{-ikx}] \quad (30)$$

$$= f_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot 2 \cos(kx) \quad (31)$$

$$= 2 \cdot f_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \cos(kx) \quad (32)$$

1.4.1 Reflexion zwischen zwei festen Enden

Betrachtet man eine mechanische Seilwelle als Beispiel, so befindet sich bei einem festen Ende ein "Schnelleknoten". Für ein solches System sind nur Eigenschwingungen möglich, bei denen die Wellenlänge λ ein ganzzahliger Bruchteil der gesamten Seillänge l ist.

Mit $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\lambda_n = \frac{2 \cdot l}{n} \quad (33)$$

Die dazugehörigen Eigenfrequenzen sind dann:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} \quad (34)$$

Folglich gilt für die n -te harmonische Schwingung:

$$f_n = n \cdot \frac{c}{2 \cdot l} \quad (35)$$

Es ist festzuhalten, dass am festen Ende ein Phasensprung von π auftritt.

1.4.2 Reflexion zwischen einem losen und einem festen Enden

Hier befindet sich am Ende der Welle ein "Schnellebauch". Es tritt kein Phasensprung auf. Die Bedingung für eine stehende Welle sieht hier etwas anders aus:

$$l = (2n - 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \quad (36)$$

deshalb folgt für die Resonanzfrequenzen:

$$f_n = (2n - 1) \cdot \frac{c}{4L} \quad (37)$$

1.5 Schallgeschwindigkeit im idealen Gas

1.5.1 Zustandsgleichungen idealer Gase

Die Zustandsgleichung eines Systems gibt an, wie seine messbaren Eigenschaften voneinander abhängen. Grundlegend hierfür ist der vorliegende Zustand des Systems, genau definiert durch die Zustandsgrößen (auch **Zustandsvariablen** (p, T, V, n) genannt).

Geht man davon aus, dass man die Stoffmenge konstant hält, beschränkt man sich bei einem idealen Gas auf eine Funktion $f(p, V, T)$. Diese Funktion wird als **Zustandsfunktion** bezeichnet. Hieraus folgt, dass bei konstanter Masse bzw. Stoffmenge nur zwei der drei Zustandsvariablen zur eindeutigen Beschreibung des Zustandes vom System nötig sind.

Als Grundlage der allgemeinen Zustandsgleichung für ein ideales Gas gelten die beiden Gesetze von BOYLE und MARIOTTE, sowie das Gesetz von GAY-LUSSAC:

Gesetz von Boyle-Mariotte: Ein Gas wird als ideal bezeichnet, wenn bei gleichbleibender Temperatur gilt:

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \quad (\text{isobar}) \quad (38)$$

Trotz der konstant gehaltenen Temperatur kann ein Wärmeaustausch stattfinden. Man geht davon aus, dass bei einem idealen Gas keine molekularen Wechselwirkungen stattfinden können. Die Moleküle werden als Punktmassen betrachtet.

1. **Gesetz von Gay-Lussac:** Das Volumen eines eingeschlossenen Gases ist der absoluten Temperatur proportional, solange der Druck nicht verändert wird:

$$\frac{p}{T} = \text{const.} \quad (\text{isochor}) \quad (39)$$

2. **Gesetz von GAY-LUSSAC:** Der Druck eines eingeschlossenen Gases ist der absoluten Temperatur proportional, solange das Volumen nicht verändert wird:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const.} \quad (40)$$

Eine Anwendung dieser Gesetze setzt voraus, dass bei der Temperaturänderung entweder der Gasdruck oder das Gasvolumen konstant bleibt. Dies ist jedoch nur selten der Fall. Aus diesem Grund fasst man die drei Gesetze zu einem zusammen:

Zustandsgleichung des idealen Gases:

Die Zustandänderung wird in zwei Schritten durchgeführt:

1. Änderung der Temperatur bei gleichem Druck
2. Änderung des Drucks bei gleich bleibender Temperatur

Nun gilt für eine bestimmte Masse eines idealen Gases:

$$pV = \nu RT \quad (41)$$

und auch

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \quad (42)$$

Mit der speziellen **Gaskonstanten R** ($8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$), die angibt, wie viel mechanische Arbeit 1 mol eines Gases verrichten kann, wenn es um 1 K erwärmt wird.

1.5.2 Adiabatische Zustandsgleichung

In der Natur treten häufig Prozesse auf, bei denen Volumen- oder Druckänderungen innerhalb eines begrenzten Volumens so schnell vor sich gehen, dass der Wärmeaustausch während dieser Zeit vernachlässigt werden kann.

Man nennt solche Prozesse ohne Wärmeaustausch **adiabatisch (isentrop)**.

Wied der Prozess reversibel geführt bleibt die Entropie während dieser Zustandsänderung konstant.

Ein Beispiel für einen solchen adiabatischen Prozess ist die Ausbreitung von Schallwellen, wie wir es in unserem Versuch auch vorliegen haben. Bei genügend hohen Frequenzen und der daraus folgenden sehr kleinen Schwingungsdauer findet zwischen einem Druckmaximum und einem Minimum nahezu kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt.

Die Kurve dieser Adiabate ($p(V) \propto \frac{1}{V^\kappa}$) ist im p - V -Diagramm steiler, als die der Isothermen ($p(V) \propto \frac{1}{V}$), da der **Adiabatenexponent** $\kappa = \frac{c_p}{c_v} > 1$ ist.

Wir haben festgelegt, dass bei einem adiabatischen Prozess gilt:

$$dQ = 0 \quad (43)$$

Folglich vereinfacht sich der erste Hauptsatz der Thermodynamik zu

$$dU = -pdV = c_V \cdot m \cdot dT \quad (44)$$

Mit Hilfe der Zustandsgleichung:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \quad (45)$$

erhält man durch Einsetzen die Gleichung

$$m \cdot c_V \cdot dT = -\frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV \quad (46)$$

Die Umstellungen mit der Beziehung $R = c_p - c_v$ (Diese Beziehung wird in 1.5.3 hergeleitet) liefert:

$$-c_v \cdot \frac{dT}{T} = (c_p - c_v) \cdot \frac{dV}{V} \quad (47)$$

und nach Integration:

$$c_v \cdot \ln T = -R \cdot \ln V + \text{const.} \quad (48)$$

$$\Rightarrow \ln T^{c_v} \cdot V^R = \text{const.}$$

$$\Rightarrow T^{c_v} \cdot V^{(c_p - c_v)} = \text{const.}$$

Zieht man schließlich noch auf beiden Seiten die C_v -te Wurzel, so erhält man mit dem Adiabatenexponent $\kappa = \frac{c_v}{c_p}$ eine der POISSON'schen Gleichungen:

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.} \quad (49)$$

Mit der Zustandsgleichung kann man diese Gleichung nun überführen in die so genannte **Adiabatengleichung (Poisson'sches Gesetz)**:

$$p \cdot V^\kappa = \text{const.} \quad (50)$$

1.5.3 Cp und Cv bei Gasen

Unter der Wärmekapazität eines Stoffes versteht man allgemein die zum Erwärmen eines Körpers um 1 K nötige Wärmemenge. Führt man also einem Körper oder einer Substanz (Gas oder Flüssigkeit) die Wärmemenge δQ zu, so bewirkt dies eine Änderung der Temperatur um dT . Man definiert die Wärmekapazität C der betreffenden Substanz als

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \quad (51)$$

Die Wärmekapazität ist eine Materialkonstante, welche absolut proportional zur Stoffmenge n der Substanz ist. Meist verwendet man jedoch die spezifische Wärmekapazität eines Stoffes, die das Verhältnis zur Masse angibt:

$$c = \frac{\delta Q}{dT \cdot m} = \frac{C}{m} \quad (52)$$

Man muss bei der Wärmekapazität darauf achten, auf welchem Weg die Erwärmung vorgenommen wurde. Unterschieden wird zwischen der Erwärmung bei konstantem Druck C_V und bei konstantem Volumen C_p .

Die kinetische Energie eines Moleküls

Die mittlere kinetische Energie der Moleküle in einem Stoff ist die Ursache der Temperatur. Nach der kinetischen Gastheorie geht man davon aus, dass der Druck eines Gases komplett durch Stöße der Gasmoleküle auf eine Behälterwand übertragen wird. Die kinetische Energie eines Moleküls beträgt:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} m_M \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B \cdot T \quad (53)$$

dabei ist $\langle v^2 \rangle$ die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Moleküle und k_B die Boltzmann-Konstante ($1,381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$).

Generell lässt sich also sagen, dass die mittlere kinetische Energie je Molekül ein Maß für die absolute Temperatur ist.

Freiheitsgrade und Äquipartitionsprinzip

Die Translationsenergie eines Teilchens kann in die drei Komponenten längs der rechtwinkligen Koordinaten des kartesischen Systems zerlegt werden. Diese unabhängigen Translationskoordinaten werden als **Translationsfreiheitsgrade** bezeichnet.

Auch die Rotation von Molekülen kann mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit in drei Komponenten zerlegt werden. Dies Ausnahme bilden zweiatomige Gase, sie haben anstatt drei nur zwei **Rotationsfreiheitsgrade**.

Da die Atome innerhalb des Moleküls gewisse Abstände je nach Bindungsart haben, treten innerhalb des Moleküls auch Schwingungen auf. Diese stellen die **Schwingungsfreiheitsgrade** dar, die ein Molekül besitzt.

Bildet man die Summe der Translations-, Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade ergibt die Zahl der Freiheitsgrade eines Moleküls. Sie geben die maximalen Bewegungsmöglichkeiten innerhalb des Moleküls und des Moleküls im Gesamten an.

Die obige Gleichung der kinetischen Energie bezieht sich auf ein 1-atomiges Gasmolekül. Dieses hat drei Freiheitsgrade der Translation.

Nach MAXWELL und CLAUSIUS gilt:

Die Energie eines Moleküls verteilt sich gleichmäßig auf die Freiheitsgrade. (Äquipartitionsprinzip)

Ein Molekül mit f Freiheitsgraden besitzt also die mittlere Gesamtenergie:

$$E_{Molekül} = \frac{f}{2} \cdot k_B \cdot T \quad (54)$$

Der Zusammenhang zwischen C_p und C_v

Für die Wärmekapazitäten gelten folgende Beziehungen:

$$C_V = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{dU}{dT} \right)_V \quad (55)$$

$$C_p = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{\delta U}{dT} + \nu R \right)_p = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p \quad (56)$$

Die innere Energie U eines Gases im Volumen V entspricht der Gesamtenergie der N Moleküle in diesem Volumen. Sie hängt außerdem von den Freiheitsgraden f der Moleküle ab.

Demnach gilt:

$$\overline{E}_{ges} = \frac{1}{2} \cdot f \cdot k_B \cdot T \quad (57)$$

und wegen der oben festgestellten Beziehung auch:

$$U = \frac{1}{2} \cdot f \cdot N \cdot k_B \cdot T \quad (58)$$

Für ein Mol eines idealen Gases folgt:

$$\frac{U}{\nu} = \frac{1}{2} \cdot f \cdot N_A \cdot k_B \cdot T = \frac{1}{2} \cdot f \cdot R \cdot T \quad (59)$$

Wird nun die Wärmemenge δQ zugeführt erhöht sich die innere Energie U um $\Delta U = \delta Q = \nu \cdot C_V \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot f \cdot R \cdot \Delta T = \nu \cdot C_V \cdot \Delta T \Rightarrow C_V = \frac{1}{2} \cdot f \cdot R$$

Für die Wärmekapazität bei konstantem Druck ergibt sich

$$C_p = \frac{f+2}{2} \cdot R \quad (60)$$

Führt man nun diese beiden Formeln zusammen, erhält man eine einfache Relation der beiden Wärmekapazitäten eines idealen Gases:

$$C_p - C_V = R \quad (61)$$

Die spezifische Wärme bei Festkörpern

Bei tiefen Temperaturen gehen alle Substanzen bzw. Elemente in den flüssigen und schließlich in den festen Zustand über. Möchte man etwas über die spezifische Wärmekapazität bei sehr tiefen Temperaturen wissen, muss man sich über die da "aufgetauten" Freiheitsgrade Gedanken machen. Da Atome in Festkörpern nur um ihre fest gebundene Ruhelage schwingen können, haben sie keine Translations- oder Rotationsfreiheitsgrade, sondern nur Freiheitsgrade der Vibration bzw. Schwingung. Sie ist auf $f = 2 \cdot 3 = 6$ beschränkt. Im Modell zeigt sich, dass jedoch nicht die gesamte Schwingungsenergie der Atome gleich verteilt ist, sondern über einen weiten Bereich hinweg.

Man betrachtet hierzu eine eindimensionale Anordnung in einem idealen Kristall, in dem alle Atome im gleichen Abstand d nebeneinander angeordnet sind. Schwingen die Atome, können sich in Folge der Kopplung Wellen im Kristall ausbreiten. Sowohl longitudinale als auch transversale Wellen können auftreten.

Beträgt $\lambda = 2d$ ist die Wellenlänge am kürzesten, bei der zwei benachbarte Atome gegeneinander schwingen. Es herrscht hier die höchste Frequenz. Die Schwingung mit der längsten Wellenlänge $\lambda = 2L$ (L Länge des Kristalls) hat die kleinste Schwingungsenergie.

Bei tiefen Temperaturen können nur Schwingungen mit sehr kleinen Energien angeregt werden. Mit steigender Temperatur wird die Zahl der anregbaren Schwingungen immer größer, bis alle angeregt sind.

Die molare spezifische Wärme eines atomaren Festkörpers steigt wegen der sehr großen Zahl ($Z = N^3 c$) aller möglichen Schwingungen praktisch kontinuierlich mit der Temperatur an.

Bei tiefen Temperaturen gilt deshalb:

Das Gesetz von Debye:

$$C_V \propto T^3 \quad (62)$$

Erst wenn alle Freiheitsgrade aufgetaut sind und alle Schwingungen angeregt sind kann man das

Gesetz von Dulong-Petit verwenden:

$$C_V = f \cdot \frac{1}{2} \cdot N_A \cdot k_B = 3R \quad (63)$$

Dieses Gesetz gilt erst ab bestimmten Temperaturen, die stoffabhängig ist. Man nennt sie auch **Debye-Temperatur**.

Folglich gibt die Messung der Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität bei konstantem Volumen eines Festkörpers Informationen darüber, wie die Frequenzen seiner Gitterschwingungen verteilt sind. Damit kann man Rückschlüsse auf die Kopplungskräfte zwischen den Atomen bzw. Molekülen schließen.

1.5.4 Herleitung der Schallgeschwindigkeit im idealen Gas

Um auf die Gleichung für die Schallgeschwindigkeit in idealen Gasen zu kommen, betrachtet man am Besten Schallwellen in einer Röhre.

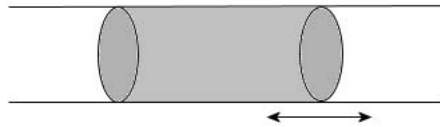


Abbildung 1: Eine mit Gas gefüllte Stauröhre

An der Stelle x beträgt die Geschwindigkeit $v(x)$ und der Druck $p(x)$. Geht man um die Strecke dx weiter, so beträgt an dieser Stelle $(x + dx)$ die Geschwindigkeit $v(x + dx)$ und der Druck $p(x + dx)$.

Man geht nun von den Kräften aus, die an den Stellen x und $x + dx$ wirken

$$F(x) = A \cdot p(x) \quad (64)$$

$$F(x + dx) = -A \cdot p(x + dx) \quad (65)$$

wobei A die Querschnittsfläche der Röhre ist. Für die Gesamtkraft die dort wirkt, gilt:

$$F = -A [p(x + dx) - p(x)] \quad (66)$$

Zudem kennt man das zweite NEWTON'sche Axiom:

$$F = m \cdot a = m \cdot \dot{v} \quad (67)$$

Setzt man diese beiden Gleichung gleich, ergibt sich:

$$F = m \cdot \dot{v} = -A [p(x + dx) - p(x)] \quad (68)$$

Wendet man auf den Druck an der Stelle $(x + dx)$ die TAYLOR-Entwicklung an so folgt für den Druck:

$$P(x + dx) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \dots \quad (69)$$

Die Gesamtkraft ist nun

$$F_{ges} = \left[m \cdot \dot{v} = m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -A \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \right) \right] \quad (70)$$

mit Hilfe von $m = \rho \cdot A \cdot dx$ folgt:

$$\rho \cdot A \cdot dx \cdot \dot{v} = -A \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \quad (71)$$

Für die Gassäule in der Röhre gilt folgende Beziehung:

$$\Rightarrow dV = dl \cdot A$$

$$\Rightarrow dl = [v(x + dx) - v(x)] \cdot dt$$

setzt man diese beiden Beziehungen gleich:

$$dV = A \cdot dt \cdot dv = A \cdot dt \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \quad (72)$$

und mit $A \cdot dx = V$ gilt:

$$\frac{dV}{V} = dt \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (73)$$

Nun führt man das Kompressionsmodul von Gasen ein, für das gilt:

$$K = -\frac{dp \cdot V}{dV} \rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{K} \quad (74)$$

Setzt man nun die Volumenänderung von oben ein, so erhält man die Relation:

$$dp = -K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dt \rightarrow dp = -K \cdot \frac{dV}{V} \quad (75)$$

Ableiten dieser Gleichung nach der Zeit t ergibt:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -K \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t \cdot \partial x} \quad (76)$$

und leitet man zudem noch die Gleichung (69) nach dem Weg x ab folgt dann:

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (77)$$

Jetzt kann man diese beiden Gleichungen vergleichen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (78)$$

hierzu verwendet man die Beziehung:

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \cdot \partial x} \quad (79)$$

Mit der in (1.1) dargestellten allgemeinen Wellengleichung kann man nun feststellen, dass gelten muss:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (80)$$

und ein weiterer Vergleich sagt nun, dass:

$$c^2 = \frac{K}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad c = v_{Ph} = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} \quad (81)$$

Dies ist die entgeltige Gleichung für die Schallgeschwindigkeit in Gasen.

Zum Schluss kann man noch mit Hilfe der **Adiabatengleichung** (siehe 1.5.2) und der **Zustandgleichung** für ideale Gase eine sehr sinnvolle Umformung durchführen:

$$p \cdot V^\kappa = const. \quad (82)$$

$$\Rightarrow dp \cdot V^\kappa + p \cdot \kappa \cdot V^{\kappa-1} \cdot dB = 0$$

$$\Rightarrow dp = -p \cdot \kappa \cdot \frac{dV}{V}$$

Zudem gilt die obige Beziehung:

$$dp = -K \cdot \frac{dV}{V} \quad (83)$$

$$\Rightarrow K = p \cdot \kappa \quad (84)$$

und mit der Zustandgleichung:

$$pV = nRT \quad (85)$$

$$\Rightarrow p \cdot \frac{m}{\rho} = nRT$$

$$\Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{nRT}{m} = \frac{RT}{M}$$

folgt die **Relation für die Schallgeschwindigkeit in einem idealen Gas:**

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{p \cdot \kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa \cdot nRT}{m}} = \sqrt{\frac{\kappa \cdot RT}{M}} \quad (86)$$

1.6 Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

Für die Herleitung dieser Formel eignet sich die Darstellung eines langen Stabes aus einem festen Medium. In diesem soll sich eine longitudinale Schallwelle ausbreiten!

Auch hier geht man an die Stellen (x) und die um die Strecke dx verschobene Stelle $(x + dx)$. Hier herrscht jeweils die Normalspannung $\sigma(x)$ und $\sigma(x + dx)$.

Der Stab habe die Dichte ρ und das Elastizitätsmodul E .

Die Teilchen in einer Ebene $x = const.$ des Stabes haben die Schwingungsamplitude f .

Betrachtet man nun die Teilchen in einer um dx verschobenen Ebene, haben diese dort die Schwingungsamplitude:

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx \quad (87)$$

Dabei ändert sich die Dicke dx eines Volumenelements $dV = A \cdot dx$ um $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx$.

Infolge der dabei nach dem HOOKE'schen Gesetz auftretenden elastischen Spannung treten rücktreibende Kräfte $F = \sigma \cdot A$ auf.

Daraus ergibt sich für die Spannung, die durch die Längenänderung beim Durchgang der Welle erzeugt wird:

$$\sigma(x) = E \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (88)$$

$$\sigma(x + dx) = E \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot (f(x + dx)) \quad (89)$$

Auch hier führt man an dieser Stelle nun eine TAYLOR-Entwicklung durch, danach gilt:

$$\sigma(x + dx) = E \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx \right) = E \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx \right) \quad (90)$$

Durch Subtraktion erhält man nun die Spannungsdifferenz:

$$d\sigma = E \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx \quad (91)$$

Auf ein Teilchen in dieser Ebene wirkt nun die Kraft:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = d\sigma \cdot A \quad (92)$$

und dies führt zu der Beziehung zwischen der zeitlichen und der räumlichen Ableitung:

$$E \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot A \cdot dx = m \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (93)$$

da ja das Volumen V gleich der Fläche A mal dem Wegstückchen dx ist. Und zudem gilt für die Dichte $m = \frac{\rho}{V}$, so ergibt sich für die Wellengleichung der longitudinalen Schallwellen in Festkörpern:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (94)$$

Wie auch bei der Herleitung der Schallgeschwindigkeit in Gasen vergleichen wir nun unser Ergebnis mit der allgemeinen Wellengleichung und können feststellen, dass für die **Schallgeschwindigkeit in Festkörpern** gelten muss:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (95)$$

2 Versuchsbeschreibung

2.1 Messmethoden des Oszilloskops, Fourier-Analyse

Im Labor ist es häufig erforderlich, zur Beobachtung und Auswertung eines Experiments den zeitlichen Verlauf von auftretenden Spannungen darzustellen. Hierfür benutzt man meist Oszilloskope, da diese weitaus komfortablere und mächtigere Funktionen bieten als etwa ein gewöhnlicher y-t-Schreiber.

So lassen sich beispielsweise die Zeit- und Spannungsachse meist beliebig skalieren, für eine genauere Betrachtung das Schaubild vergrößern und mit modernen Geräten sogar ganz einfrieren. Hilfslinien lassen sich als Markierungen an beliebigen Punkten setzen und erlauben so das digitale Vermessen von Spannungskurven, sowohl den Zeitverlauf auf der x-Achse als auch die Amplitude auf der y-Achse.

Das im Praktikum verwendete Gerät ermöglicht es außerdem noch die Betrachtung des Schwingungsspektrums, aus dem sich die als Kurve dargestellte Schwingung zusammensetzt. Die Grundlage bildet dabei die FOURIER-Transformation, mit deren Hilfe sich jede periodische Funktion durch eine unendliche Reihe von *sin*-Funktionen der Gestalt

$$f_n(t) = a_n \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (96)$$

darstellen lässt. In der Praxis lassen sich besonders in kurzer Zeit natürlich nicht unendlich viele Koeffizienten berechnen, somit wird die eigentliche Funktion $f(t)$ lediglich mit einer Funktion $\tilde{f}(t)$ mit einer endlichen Anzahl von Koeffizienten approximiert.

Die untersuchten Schwingungen sind solch periodische Funktionen und erfüllen damit die Voraussetzungen für die FOURIER-Analyse. Da die Wellengleichung aus linearen Kraftgesetzen abgeleitet wird, lassen sich Lösungen linear kombinieren und bilden dann ebenfalls wieder eine Lösung dieser Wellengleichung.

Der FFT-Modus (FastFourierTransformation) beim Oszilloskop zeichnet nun nicht mehr die Amplitude der Schwingung über der Zeit, sondern stellt die Amplitude als Funktion der Frequenz dar. So lässt sich leicht an den Peaks erkennen, welche Schwingungen maßgeblich an der Gesamtamplitude beteiligt sind.

Schnell bemerkt man, dass die im Labor untersuchten Schwingungen nicht wie oft idealisiert aus einer einzelnen *sin*-Funktion bestehen, sondern eine Überlagerung vieler Schwingungen sind. Besonders deutliche Beiträge außer der Grundschiwingung liefern dabei die Oberschwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundschiwingungsfrequenz sind. Anhand der Oberschwingungen lässt sich auch überprüfen, ob es sich bei einer Frequenz um die gesuchte Grundfrequenz oder lediglich eine andere Frequenz mit großer Amplitude handelt.

2.2 Quincke'sches Resonanzrohr

Das Quincke'sche Resonanzrohr besteht aus einem aufrecht stehenden Rohr, in dem eine Gassäule (Luft oder CO_2) eingeschlossen ist. Diese Gassäule wird durch ein Mikrofon im Deckel in Schwingung versetzt. Durch eine in der Höhe verschiebbare Bodenplatte lässt sich die Höhe (die Länge) der Gassäule variieren und so verschiedene Randbedingungen für die Schwingung im Rohr vorgeben.

Die Amplituden der Schallwellen überlagern sich dann konstruktiv, wenn an beiden Enden der Röhre gerade ein Schwingungsknoten anliegt, und man hört den vom Lautsprecher vorgegebenen Ton besonders laut. Der einfachste Fall hierfür ist eine Rohrlänge von einer halben Wellenlänge der Schallwellen ($L = \frac{\lambda}{2}$), weitere Lautstärkemaxima erhält man sobald sich jeweils ein weiterer Knoten am Ende der Röhre befindet.

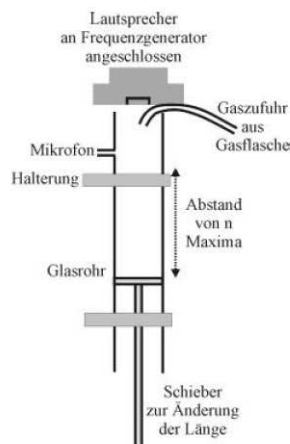


Abbildung 2: Quincke'sches Resonanzrohr
(Quelle: Protokoll von Birnesser/Wagner)

Beim n -ten Lautstärkemaximum ergibt sich also folgende Bedingung für die Länge L der Gassäule:

$$L = (n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (97)$$

Daraus folgt für die Hälfte der Wellenlänge λ der Schwingung:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{L}{(n + 1)} \quad (98)$$

Verlängert oder verkürzt man also durch Heben oder Senken der Bodenplatte die Rohrlänge kontinuierlich, so registriert das Mikrofon in der Bodenplatte alle halbe Wellenlänge wieder eine maximale Lautstärke bzw. ein Lautstärkeminimum.

Mit Hilfe des Millimeterpapiers auf dem Rand des Rohrs kann man also die Rohrlängen ausmessen, bei denen das an das Mikrofon angeschlossene Oszilloskop ein Lautstärkemaximum anzeigt. Die Differenz aus den Längen L_1 für das erste und L_n für das letzte Maximum geteilt durch die Anzahl der Messschritte $n - 1$ ergibt dann gemittelt die halbe Wellenlänge der Schwingung:

$$\frac{\bar{\lambda}}{2} = \frac{L_n - L_1}{n - 1} \quad (99)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls ist bekanntlich über die Wellenlänge mit der Frequenz verknüpft, und so lässt sich aus der ermittelten Wellenlänge $\bar{\lambda}$ und der vorgegebenen Frequenz f der Schwingung die Schallgeschwindigkeit c berechnen:

$$c = \bar{\lambda} \cdot f \quad (100)$$

Die Messungen werden nun mit unterschiedlichen Frequenzen wiederholt und schließlich auch die Luftfüllung durch Kohlenstoffdioxid ersetzt. Dazu wird der schwenkbare Deckel der Röhre etwas zur Seite weggedreht und über einen Schlauch das Gas aus der CO_2 -Flasche in das Rohr gefüllt.

Damit beim Füllvorgang nicht zu viel Gas wieder entweichen kann, wird die Öffnung für den Schlauch möglichst klein gehalten und die optimale Füllgeschwindigkeit ermittelt. Mit drei unterschiedlichen Sinkgeschwindigkeiten wird die Bodenplatte vor dem Schlauch nach unten gezogen und anschließend eine Probemessung gestartet. Da nach den Literaturwerten für das schwerere CO_2 eine geringere Schallgeschwindigkeit und damit eine geringere Wellenlänge bei gleicher Frequenz erwartet wird als für Luft, benutzt man für die weiteren Messungen das Verfahren, bei dem die kleinsten Wellenlänge gemessen wurde. Denn je größer der Luftanteil an der Gasfüllung ist, desto größer wird die gemessene Wellenlänge und die Schallgeschwindigkeit.

Als optimal stellte sich für uns ein zügiges, jedoch nicht zu schnelles Einfüllen des Gases heraus.

2.3 Longitudinale Schallwellen in Metallstäben

2.3.1 Metallstab mit einer Halterung

Ähnlich wie für Gase im Resonanzrohr lässt sich auch für Metalle auf einfache Art die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen bestimmen. Dazu wird ein Metallstab mittig in eine Halterung eingespannt und durch einen Schlag mit einem stumpfen Gegenstand auf ein Stabende die Störung erzeugt. Am anderen Ende des Stabs empfängt wieder ein Mikrofon die ankommende Schallwelle und überträgt die Information an das Oszilloskop.

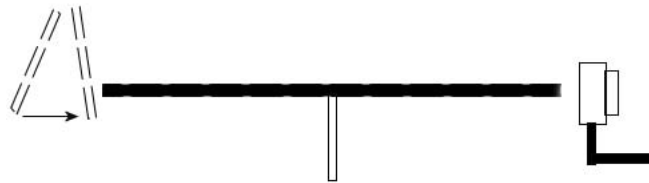


Abbildung 3: Versuchsaufbau für das Stahlrohr

Durch das Fixieren des Stabs in der Mitte wird für die Schwingung dort ein Knoten erzwungen, während sich an den Enden des Stabs Schwingungsbäuche ergeben. Somit passt für die Grundschwingung in die gesamte Stablänge gerade eine halbe Wellenlänge.

Über die am Oszilloskop aufgenommene Frequenz f und die gemessene Stablänge L lässt sich dann die Schallgeschwindigkeit c im Metallstab berechnen:

$$c = \lambda \cdot f = 2 \cdot L \cdot f \quad (101)$$

2.3.2 Metallstab mit zwei Halterungen

Analog funktioniert der Aufbau für zwei Stabhalterungen, welche bei $\frac{1}{4}L$ und $\frac{3}{4}L$ angebracht werden.



Abbildung 4: Versuchsaufbau für das Messingrohr

Wieder befinden sich an den Stabenden Schwingungsbüchse und die Halterungen stellen Schwingungsknoten dar. Zusätzlich zum Fall mit der einzelnen Halterung passt nun noch eine halbe Wellenlänge der Grundschwingung zwischen die beiden Befestigungen, wodurch sich für die Wellenlänge λ der Schwingung genau eine gesamte Stablänge L ergibt.

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c gilt damit:

$$c = \lambda \cdot f = L \cdot f \quad (102)$$

Wie bereits erwähnt treten im Experiment jedoch nicht nur die Grundschwingung mit der Frequenz f auf, sondern viele weitere Schwingungen. Besonders deutlich sieht man auf dem Oszilloskop die Oberschwingungen mit Vielfachen der Grundfrequenz, meist bis zur zweiten oder dritten Ordnung.

3 Versuchsauswertung

3.1 Quincke'sches Resonanzrohr

Bei der Fehlerrechnung zu unseren Messungen entschieden wir uns für die Berechnung des Größtfehlers.

Er erschien uns hier sinnvoller, da wir wussten, dass wir einen systematischen Fehler in der Messreihe haben. Mit Hilfe des Größtfehlers können wir diesen mit berücksichtigen, was bei der Gauss-Fehlerrechnung nicht der Fall wäre.

Die allgemeine Formel lautet:

$$|\Delta f| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \lambda \cdot f$ der Schallwelle lautet der Größtfehler dann:

$$|\Delta c| = |f \cdot \Delta \lambda| + |\lambda \cdot \Delta f|$$

Als Messungenauigkeiten wurden $\Delta f = 1\text{Hz}$ und $\Delta \lambda = 1\text{mm}$ angenommen.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit lässt sich rechnerisch auch aus den Literaturwerten und der Raumtemperatur ermitteln:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{c_p \cdot R \cdot T}{c_v \cdot M}}$$

Literaturwerte:

| | | | | | |
|---------------------------------------|-------|--|---------------------------------------|--------|---|
| spezif. Wärmekapazität $c_{p,Luft}$: | 1005 | $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ | spezif. Wärmekapazität $c_{v,Luft}$: | 717 | $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ |
| spezif. Wärmekapazität c_{p,CO_2} : | 837 | $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ | spezif. Wärmekapazität c_{v,CO_2} : | 647 | $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ |
| Gaskonstante R: | 8,134 | $\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ | molare Masse M_{Luft} : | 28,96 | $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$ |
| | | | molare Masse M_{CO_2} : | 44,01 | $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$ |
| Raumtemperatur: | 21,9 | °C | $\Rightarrow c_{Schall,Luft}$: | 340,82 | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| | | | $\Rightarrow c_{Schall,CO_2}$: | 265,60 | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

3.1.1 Luftfüllung

Für die erste Messreihe mit Luft als Füllung ergibt sich:

| f [Hz] | 1. Max. [mm] | n. Max. [mm] | Anz. Max. | λ [mm] | c [m/s] | Δ c [m/s] |
|--------|--------------|--------------|-----------|----------------|---------|------------------|
| 1002 | 283 | 110 | 2 | 346 | 346,69 | 1,35 |
| 1507 | 261 | 36 | 3 | 225 | 339,08 | 1,73 |
| 2023 | 270 | 15 | 4 | 170 | 343,91 | 2,19 |
| 2511 | 358 | 40 | 6 | 127,2 | 319,4 | 2,64 |
| 2884 | 332 | 24 | 6 | 123,2 | 355,31 | 3,01 |
| 3300 | 317 | 44 | 6 | 109,2 | 360,36 | 3,41 |
| 3998 | 246 | 32 | 6 | 85,6 | 342,23 | 4,08 |
| | | | | \bar{c} | 343,85 | $\pm 4,08$ |

Damit liegt unser errechneter Mittelwert $\bar{c} = 343,85 \text{ m/s}$ für Luft etwa 0,89% über dem Theoriewert $c_{Schall, Luft} = 340,82 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3.1.2 CO_2 -Füllung

Vor der zweiten Messreihe wurde nun die Luftfüllung durch CO_2 -Gas ersetzt und anschließend die Messungen wiederholt:

| f [Hz] | 1. Max. [mm] | n. Max. [mm] | Anz. Max. | λ [mm] | c [m/s] | Δ c [m/s] |
|--------|--------------|--------------|-----------|----------------|---------|------------------|
| 3950 | 332 | 59 | 9 | 68,25 | 269,59 | 4,02 |
| 3295 | 358 | 22 | 9 | 84 | 276,78 | 3,38 |
| 3023 | 387 | 60 | 8 | 93,43 | 282,43 | 3,12 |
| 2608 | 352 | 29 | 7 | 107,67 | 280,79 | 2,72 |
| 2312 | 332 | 33 | 6 | 119,6 | 276,52 | 2,43 |
| 2020 | 340 | 66 | 5 | 137 | 276,74 | 2,16 |
| 1513 | 328 | 52 | 4 | 184 | 278,39 | 1,7 |
| | | | | \bar{c} | 277,32 | $\pm 4,02$ |

Unser errechneter Mittelwert $\bar{c} = 277,32 \text{ m/s}$ für CO_2 ist also etwa 4,41% größer als der Theoriewert $c_{Schall, CO_2} = 265,60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Unsere Messungen weichen hier viel stärker vom Literaturwert ab, da wir in der Röhre nie ausschließlich CO_2 hatten. Sie war nicht abgeschlossen, und so konnte ständig Luft in die Röhre nachströmen und so die CO_2 -Messung verfälschen.

3.2 Longitudinale Schallwellen in Metallstäben

Die im FFT-Betrieb abgelesenen Frequenzen wurden in eine Tabelle übertragen und mit Hilfe der Oberschwingungen ein Mittelwert für die Grundschiwingung errechnet, weil im FFT-Betrieb die Messgenauigkeit lediglich bei $\Delta f = 5Hz$ liegt. Da die Frequenzen der Oberschwingungen Vielfache der Grundfrequenz sind, lässt sich so diese Ungenauigkeit etwas verkleinern.

Bei den Metallstäben betrachten wir zunächst den in der Mitte eingespannten Stab aus Stahl. Die errechneten Mittelwerte multipliziert mit der doppelten Stablänge $2L = 1\lambda$ ergeben dann wieder die Ausbreitungsgeschwindigkeit c im Medium.

Der Größtfehler für $c = \lambda \cdot f = 2L \cdot f$ errechnet sich aus

$$|\Delta c| = |2f \cdot \Delta L| + |2L \cdot \Delta f|$$

Ähnliches gilt für den bei $\frac{1}{4}L$ und $\frac{3}{4}L$ eingespannten Messingstab. Hier lautet der Größtfehler für $c = \lambda \cdot f = L \cdot f$ dann

$$|\Delta c| = |f \cdot \Delta L| + |L \cdot \Delta f|$$

Als Messungenauigkeiten werden jeweils $\Delta L = 1mm$ (Meterstab) und $\Delta f = 5Hz$ (ungenaueste Messung im FFT-Betrieb) angesetzt, um die statistische Richtigkeit zu gewährleisten.

Wie auch für Gase lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls im Medium theoretisch herleiten und aus einigen charakteristischen Größen berechnen. Für Festkörper gilt

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

wobei der Elastizitätsmodul E und die Dichte ρ des Materials aus der Literatur herangezogen werden:

Literaturwerte:

| | | | | | |
|-------------------------------------|---------|---------------|---------------------------|------|------------------|
| E-Modul E_{Stahl} : | 200 | GPa | Dichte ρ_{Stahl} : | 7900 | $\frac{kg}{m^3}$ |
| E-Modul $E_{Messing}$: | 105 | GPa | Dichte $\rho_{Messing}$: | 8500 | $\frac{kg}{m^3}$ |
| $\Rightarrow c_{Schall, Stahl}$: | 5031,55 | $\frac{m}{s}$ | | | |
| $\Rightarrow c_{Schall, Messing}$: | 3514,68 | $\frac{m}{s}$ | | | |

3.2.1 Metallstab mit einer Halterung

Aus der ersten Messreihe mit dem in der Mitte eingespannten Stahlstab der Länge $75,0\text{ cm}$ erhält man dann folgende Werte:

| f_0 [Hz] | f_1 [Hz] | f_2 [Hz] | \bar{f} [Hz] | c [m/s] | Δc [m/s] |
|------------|------------|------------|----------------|-----------|------------------|
| 3460 | 6915 | 10370 | 3458,06 | 5187,08 | 21,92 |
| 3460 | 6915 | 10370 | 3458,06 | 5187,08 | 21,92 |
| 3455 | 6915 | 10370 | 3456,39 | 5184,58 | 21,91 |
| 3455 | 6920 | 10370 | 3457,22 | 5185,83 | 21,91 |
| 3460 | 6915 | 10370 | 3458,06 | 5187,08 | 21,92 |
| | | | | | |
| | | | \bar{c} | 5186,33 | $\pm 21,92$ |

Der Mittelwert \bar{c} für die Schallgeschwindigkeit liegt also rund 3,08% über dem Theoriewert $c_{Schall,Stahl} = 5031,55 \frac{m}{s}$. Diese doch recht große Abweichung liegt an den sehr ungenauen Angaben zum Stahl. Wir wussten nicht um welche spezifische Stahlsorte es sich bei unserer Messreihe handelte. Diese haben jedoch stark voneinander abweichende Werte für die Schallgeschwindigkeit!

3.2.2 Metallstab mit zwei Halterungen

Mit dem Messingstab (Länge $160,1\text{ cm}$), der bei $\frac{1}{4}L$ und $\frac{3}{4}L$ eingespannt war, ergibt sich folgende Tabelle:

| f_0 [Hz] | f_1 [Hz] | f_2 [Hz] | f_3 [Hz] | \bar{f} [Hz] | c [m/s] | Δc [m/s] |
|------------|------------|------------|------------|----------------|-----------|------------------|
| 2125 | 4255 | 6400 | - | 2128,61 | 3407,91 | 12,26 |
| 2130 | 4255 | 6420 | - | 2132,5 | 3414,13 | 12,27 |
| 2125 | 4255 | 6400 | - | 2128,61 | 3407,91 | 12,26 |
| 2125 | 4255 | 6400 | 8555 | 2131,15 | 3411,96 | 12,27 |
| 2125 | 4255 | 6380 | 8550 | 2129,17 | 3408,8 | 12,26 |
| 2130 | 4255 | 6400 | 8550 | 2132,08 | 3413,47 | 12,27 |
| | | | | | | |
| | | | | \bar{c} | 3410,7 | $\pm 12,27$ |

Hier ist der Mittelwert \bar{c} aus der Tabelle etwa 2,96% kleiner als der theoretisch erwartete Wert $c_{Schall,Messing} = 3514,68 \frac{m}{s}$.

Zusätzlich zu den Grund- und Oberschwingungen zeigte das Oszilloskop noch viele weitere Schwingungen an. Deren Amplituden waren auf der logarithmisch skalierten y -Achse jedoch deutlich kleiner, was umgerechnet einigen Zehnerpotenzen entspricht. Diese zusätzlichen Frequenzen stammen vermutlich unter anderem von den Halterungen, da diese nicht besonders gut gedämpft waren und ebenfalls mitschwingen konnten.

4 Fehlerdiskussion

4.1 Das Oszilloskop

Bevor wir mit den eigentlichen Experimenten begannen, machten wir ein paar Probemessungen mit dem Oszilloskop und dem Frequenzgeber. Dabei zeigten sich bereits die ersten Fehlerquellen für spätere Messungen. Von kleineren Unterschieden abgesehen stimmte die vom Oszilloskop gemessene Frequenz zwar mit der angegebenen Frequenz der Quelle überein, jedoch veränderte sich diese vorgegebene Frequenz um wenige Hertz während man die Messwerte ermittelte.

Besonders mit dem zugeschalteten Verstärker musste die Amplitude sehr feinfühlig reguliert werden um noch eine schöne \sin -Kurve zu erhalten. Bei nur geringfügig zu hoher Amplitude flachten die Bögen für die Amplitudenmaxima deutlich ab, wodurch sowohl die Amplitude auf der y -Achse als auch die Position der Spitze auf der x -Achse nur noch zu erraten waren. Da die x -Achse in Oszilloskop der Zeitachse entspricht, werden die Positionen für die digitalen Cursorlinien ungenauer und damit auch die angezeigte Frequenz der Welle.

Auch die Qualität des Bilds hängt maßgeblich von der Amplitude ab. So musste stets die Amplitude etwas angepasst werden um ein möglichst rauschfreies Signal zu erhalten. Äußere Einflüsse wie Geräusche von anderen Personen und Gruppen sowie die Schwingungen von Möbeln und dem Gebäude selbst störten das Signal zusätzlich.

Im FFT-Betrieb gelangen die Messungen der Frequenzen nicht so präzise wie erwünscht. Trotz zehnfacher Vergrößerung durch den digitalen Zoom konnte man nur mit einer Genauigkeit von etwa fünf Hertz die Frequenz bestimmen, da das Oszilloskop keine kleineren Skalierungen zuließ. Deshalb wurden auch die Frequenzen der Grundschnwingungen mit Hilfe der Oberschwingungen überprüft und korrigiert, da sich bei einem Vielfachen der Frequenz die Messungenauigkeit trotzdem nur auf die besagten fünf Hertz belief und so durch Zurückrechnen die Genauigkeit etwas erhöht werden konnte.

4.2 Das Resonanzrohr

Bei den Versuchen mit dem Quincke'schen Resonanzrohr ergaben sich viele Fehler durch das Rohr selbst. Der Deckel mit dem integrierten Lautsprecher war seitlich an einem Stativ

befestigt und deckte das Rohr durch seine starre Oberfläche und das durch das Eigengewicht bedingte schiefe Lage nicht sauber zu. So konnte während der Versuche stets ein Gasaustausch mit der Umwelt stattfinden, was sich bei der CO_2 -Füllung deutlich bemerkbar machte.

Auch die verschiebbare Bodenplatte mit dem Mikrofon schloß das Rohr nicht dicht nach unten ab, wodurch das schwerere Kohlenstoffdioxid sich ebenfalls mit der Außenluft mischen konnte. Man musste also einen guten Kompromiss zwischen schneller Einfüllgeschwindigkeit (und damit wenig Zeit für Durchmischung von Luft und Kohlenstoffdioxid) und ausreichender Zeit für die Befüllung mit Kohlenstoffdioxid finden um gute Ergebnisse zu erhalten.

Bei der Bestimmung der Maxima durfte man nun die Bodenplatte nicht mehr rückwärts bewegen, da man sonst für das zuvor verdrängte Kohlenstoffdioxid normale Luft in das Rohr eingesaugt hätte. Da manche Maxima erst bei wieder sinkender Amplitude genau zu erkennen waren, verschieben sich die Abstände zwischen den Maxima etwas.

Die im Rohr angebrachte Skala war manchmal nur schwierig abzulesen, da die Bodenplatte nicht ganz plan war und es sich als kompliziert herausstellte, die Position der frei gehaltenen Bodenplatte nicht mehr zu verändern sobald man die Position eines Maximums vermutete. Die nur sehr spärliche Beschriftung des Millimeterpapiers erleichterte das rasche Ablesen ebenfalls nicht.

4.3 Die Metallstäbe

Wie bei allen Längenmessungen sind eine exakte Skala und möglichst scharfe Kanten nötig um die Länge präzise erfassen zu können. Die benutzten Metallstäbe waren an den Enden jedoch teilweise rund geschliffen und keinesfalls plan. Man musste also möglichst exakt ein Lot von der Spitze des Metallstabes zur Skala des Meterstabs fallen und dort den hoffentlich richtigen Wert ablesen.

Auch der Aufbau selbst enthielt einige Fehlerquellen wie etwa die Halterungen für die Metallstäbe. Da die Metallstäbe nur in dünnen Korkplättchen und über eine Stange am Tisch festgeschraubt waren, konnten sie ebenfalls leicht mitschwingen und sorgten für einige störende Schwingungsfrequenzen.

Auch die Stäbe selbst verhielten sich nicht immer wie gewollt. Durch das Anschlagen des Stabendes mit einem anderen Rohr erzeugte man nicht nur die sich longitudinal ausbreitende Störung im Stab, sondern auch transversale Schwingungen des Stabs. Vermutlich wirken sich diese Schwingungen auch etwas auf die longitudinalen Wellen aus und verzerren das Signal.

Die Position der Halterungen spielt ebenfalls eine Rolle. Bei der Herleitung der Gleichungen für die Schwingungen legt man immer ganzzahlige Teile einer Wellenlänge zwischen Stabende und Knoten. Befinden sich die Halterungen aber nicht mehr exakt an diesen Positionen, gelten die Bedingungen für die Herleitung der Formeln nicht mehr. Deshalb ist wie immer stets auf einen exakten Versuchsaufbau zu achten.

5 Literaturverzeichnis

1. Dieter Meschede: Gerthsen Physik
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002, 21.Auflage
2. Demtröder: Experimentalphysik 1 (Mechanik und Wärme)
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004, 3.Auflage
3. Horst Kuchling: Taschenbuch der Physik
Fachbuchverlag Leipzig, 2004, 18.Auflage
4. P.A. Tipler: Physik
Spektrum Akademischer Verlag Berlin Oxford, 1995, 1.Auflage
5. W.Walcher: Praktikum der Physik
Teubner Studienbücher Physik, 1989, 6.Auflage
6. Skript zur Vorlesung Grundlagen II von Prof. P.C.Hägele, 2004-2005
7. F.K.Kneubühl: Repetitorium der Physik
Teubner Studienbücher, 1995
8. Abbildung 2: AP-Protokoll von Sascha Wagner und Andreas Birnesser 2000