

Grundpraktikum der Physik



Versuch 7: Elastizitätskonstante von kristallinen Festkörpern (Metallen)

Konrad Steible

Anne Götz

13. Oktober 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Struktur des Festkörpers	3
1.1.1	Kristalline Festkörper	3
1.1.2	Amorphe Stoffe	3
1.1.3	Idealer Kristall und Kristallbaufehler	3
1.2	Zwischenmolekulare Kräfte	4
1.3	Deformationen und Moduln	7
1.3.1	Dehnung und Elastizitätsmodul	7
1.3.2	Kompression und Kompressionsmodul	8
1.3.3	Scherung	8
1.3.4	Spannungstensor	8
1.3.5	Spannungs-Dehnungs-Diagramm	9
1.3.6	POISSON'sche Zahl	9
2	Herleitungen zum Versuch	11
2.1	Biegekurve eines Balkens	11
2.2	Biegeschwingung eines eingespannten Balkens	14
3	Versuchsbeschreibung	17
3.1	Biegekurve eines Balkens	17
3.1.1	Der Kupferstreifen	18
3.1.2	Der Aluminiumstreifen	20
3.2	Biegeschwingung eines eingespannten Balkens	21
3.2.1	Der Aluminiumstreifen	21
4	Fehlerbetrachtung	22
5	Literaturverzeichnis	23

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Struktur des Festkörpers

1.1.1 Kristalline Festkörper

Üblicherweise besitzen Festkörper Kristallstruktur, also eine regelmäßige Anordnung von sog. Elementarzellen. Diese Elementarzellen bilden durch die regelmäßige Aneinanderreihung in alle Richtungen das Kristallgitter des Festkörpers. Auguste Bravais gelang es mathematisch nachzuweisen, dass es 14 mögliche Formen von Elementarzellen gibt (Bravaiszellen). Diese Zellen lassen sich wiederum zu sieben Kristallfamilien zusammenfassen: monoklin, triklin, trigonal, tetragonal, hexagonal, rhombisch und kubisch.

Die Periodizität dieser grundlegenden Bausteine erlaubt es, Vorhersagen über Position und Ausrichtung der weiteren Elementarzellen im Körper zu treffen. Diese wichtige Eigenschaft der Festkörper nennt man in der Festkörperphysik auch Fernordnung.

1.1.2 Amorphe Stoffe

Im Gegensatz dazu besitzen amorphe Körper keine regelmäßige, periodische Struktur über größere Entfernungen wie die kristallinen Festkörper, sondern lediglich in sehr kleinen Bereichen. Die amorphen Stoffen besitzen damit ebenfalls eine Nahordnung wie kristalline Stoffe, jedoch keine Fernordnung. Die Grenze zwischen Festkörper und Flüssigkeit ist nicht mehr scharf wie bei Kristallen: Amorphe Stoffe wie Glas brechen zwar ebenfalls unter hohen Belastungen, sie beginnen aber schon unter Einwirkung kleiner Kräfte zu fließen. Beim Erhitzen erreicht man ebenfalls keinen definierten Schmelzpunkt, vielmehr gehen amorphe Stoffe allmählich in den flüssigen Zustand über. In der Festkörperphysik spielen sie meist eine geringere Rolle, hauptsächlich werden Stoffe mit Kristallstruktur untersucht.

1.1.3 Idealer Kristall und Kristallbaufehler

Eine streng periodische und gleichmäßige Anordnung der Elementarzellen, einen idealen Kristall, gibt es in der Realität jedoch nicht. So treten verschiedene Arten von Kristallfehlern auf, die sich nach ihrer räumlichen Ausdehnung gliedern lassen:

- **Punktfehler (nulldimensional):** Nicht immer sind die Elementarzellen mit genau der exakten Anzahl von Atomen bestückt, sondern besitzen eine Lücke in der Struktur. Man spricht dann von Schottky-Defekten. Analog dazu gibt es den Anti-Schottky-Defekt, bei dem sich ein zusätzliches Atom des Stoffes in der Gitterstruktur befindet. Man nennt diese Atome auch Zwischengitteratome. Treten sowohl Schottky- als auch Anti-Schottky-Defekte in Verbindung miteinander auf, bezeichnet man diese als Frenkel-Defekte. Solche Punktfehler sind stets in jedem kristallinen Festkörper anzutreffen.

- **Versetzung:** Es gibt zwei Arten von Versetzungen: Die Schraubenversetzung und die Stufenversetzung.
Bei der Schraubenversetzung wird ein Kristall entlang einer Schnittfläche teilweise aufgetrennt. Daraufhin wird ein Teil der Netzebene um einen Betrag nach unten versetzt und anschließend kann der Kristall wieder zusammengesetzt werden. Im Grenzfall kann es sich dabei um nur eine Atomschicht handeln.
Bei der Stufenversetzung wird eine Ebene bis zur Schnittlinie eingefügt. Dies kann durch äußere Krafteinwirkungen herbeigeführt werden.
- **Zweidimensionale Defekte:** Der wohl einfachste zweidimensionale Defekt ist die Oberfläche selbst des Kristalls.
- **Chemische Fehlorderungen:** Auch Fremdatome (Atome von anderen Stoffen) können reguläre Plätze im Kristallgitter oder im Zwischengitter belegen und damit auch die Eigenschaften des Körpers hinsichtlich optischer und elektrischer Leitfähigkeit o.ä. beeinflussen.

1.2 Zwischenmolekulare Kräfte

Zwischen Molekülen, Atomen und auch Ionen wirken Kräfte, deren Größe bestimmend dafür ist, in welchem Aggregatzustand ein Material vorliegt. Sowohl bei Festkörpern, als auch bei Flüssigkeiten bestimmen diese Kräfte das Volumen.

Betrachtet man nun eine Volumenänderung des Materials, bzw. des Mediums, so stellt man fest, dass dazu immer eine äußere Kraft notwendig ist. Folglich müssen die Moleküle ohne das Wirken einer externen Kraft einen bestimmten Abstand voneinander haben, bei dem sie in der so genannten Gleichgewichtslage sind.

Ist dieser Abstand zwischen den Molekülen kleiner als der Normalabstand, so wirken die Molekülkräfte abstoßend, bei größerem dagegen anziehend.

Zwischenmolekulare Kräfte sind demnach Resultierende einer Abstoßungs- und einer Anziehungskraft, die sich im Normalabstand (in der Gleichgewichtslage) vollkommen kompensieren. Die Reichweite dieser Kräfte ist sehr gering. Man spricht von der Wirkungssphäre, die eine Kugel darstellt mit einem Radius der Größenordnung von 10 Nanometern.

- **Ionische Bindungen:** Zu den wichtigsten Bindungsarten der Chemie gehört neben der kovalenten Bindung die ionische Bindung. Sie wird oft auch als heteropolare Bindung bezeichnet. Sie lässt sich bis zu einem gewissen Grad mit dem Bild zweier sich anziehender Teilchen darstellen:
Als Beispiel kann man ein Natriumchlorid-Molekül betrachten (Kochsalz). Das äußerste Elektron des Natriumatoms ist ein einzelnes 3s-Elektron, das relativ leicht zu entfernen ist. Durch Entfernen des äußersten Elektrons entsteht beim Natrium ein einfach positiv geladenes Ion Na^+ mit einer abgeschlossenen, kugelsymmetrischen äußeren Elektronenschale. Dagegen fehlt dem Chloratom andererseits genau ein Elektron zur

kompletten Außenschale.

Die Energie, die bei der Aufnahme eines Elektrons durch ein Atom frei wird, nennt man **Elektronenaffinität**. Nimmt ein Chloratom ein Elektron auf, so bildet sich das Chlorid-Ion Cl^- .

Streng mathematisch betrachtet sind die beiden entstandenen Ionen unendlich weit auseinander. Dies bedeutet bei großer Entfernung zwischen den beiden Elektronen wird das Valenzelektron des Natriums aus energetischen Gründen nicht zum Chloratom übergehen. (Es sei denn die benötigte Energie wird von außen zugeführt).

Interessant ist jedoch der Fall, dass die Atome sehr nahe sind. Ab einem bestimmten Abstand, der durch die Coulomb'sche Wechselwirkungsenergie bestimmt wird, gibt das Natriumatom sein Valenzelektron an das Chlor ab und es bildet sich als Molekül das Ionenpaar: Na^+Cl^- .

Um so näher sich die Ionen kommen, desto stärker wird die elektrostatische Anziehungskraft. Man würde erwarten, dass es also keinen Gleichgewichtszustand gibt.

Jedoch tritt bei kleinem Kern-Kern-Abstand ein anderer Effekt auf, und zwar die gegenseitige Abstoßung der Elektronenhüllen aufgrund des **Pauli-Verbots**. Nach diesem kann nicht mehr als ein Elektron einen bestimmten Quantenzustand besetzen. Folglich wird dadurch eine zu starke Überlappung der Schalen verhindert.

Wird der Abstand der Ionen nun aber kleiner, beginnen sich die Wellenfunktionen der inneren Elektronen zu überlappen, da sich ja die Elektronen im selben Raum aufhalten. Gemäß dem Pauli-Verbot müssen dann einige Elektronen in Zustände übergehen, die höheren Quantenzuständen entsprechen. Dazu muss Energie aufgebracht werden. (Dieses Phänomen ist gleichbedeutend mit der Abstoßung der beiden Ionen bei geringem Abstand. Aufgrund des Pauli-Prinzips wird sich dauerhaft ein Gleichgewichtszustand einstellen.

Die gesamte potentielle Energie des Ionenpaares ist gleich der Summe aus der elektrostatischen Anziehung und der Abstoßung. In diesem eben beschriebenen Gleichgewichtszustand ist die Energie minimal. Dies liegt bei einem ganz spezifischen Abstand r_0 vor. Ist der Abstand kleiner als r_0 , dann steigt die Energie steil an.

Die Energie, die man aufwenden muss, um das Ionenpaar (im Gleichgewichtszustand) in die isolierten neutralen Atome zu überführen, nennt man auch Dissoziationsenergie.

- **Die kovalente Bindung:** Eine ionische Bindung kann nur zwischen Atomen zustande kommen, deren Elektronenaffinitäten sich deutlich unterscheiden und bei denen durch den Austausch von Elektronen abgeschlossene Elektronenschalen entstehen.

Bei identischen Atomen ist ein anderer Mechanismus dafür verantwortlich, dass sich Moleküle ausbilden können: Die kovalente Bindung (auch homöopolare Bindung genannt). Am Einfachsten ist dies am Beispiel des Wasserstoffmoleküls zu betrachten. Berechnet man hier die Energie, die dafür nötig ist, die Übertragung eines Elektrons zu ermöglichen und so ein H^+ und ein H^- zu erzeugen und addieren die elektrostatischen Anziehungskräfte beider Ionen, so stellt man fest, dass die Gesamtenergie bei keinem Abstand negativ ist. Folglich kann die Bindung im H_2 -Molekül nicht ionisch sein! Sie lässt sich jedoch nicht mehr klassisch erklären, sondern nur quantenmechanisch: Die Energieabnahme bei der Annäherung und Bindung der zwei Atome beruht

auf der Zugehörigkeit beider Elektronen zu beiden Atomen. Eine entscheidende Rolle spielen hierbei die Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen beider Elektronen.

- **Coulombkräfte:** Es handelt sich hierbei um die elektrostatische Kraft zwischen zwei Punktladungen. Sie wird beschrieben durch das Coulomb'sche Gesetz. Dieses besagt, dass die Kraft zwischen zwei Punktladungen proportional zum Produkt dieser Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes ist. Zwei Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab, solche mit verschiedenen ziehen sich an. Innerhalb von Flüssigkeiten treten Coulombkräfte durch die elektrostatische Anziehung von Ionen (z.B. in Salzlösungen) und Wechselwirkungen zwischen Dipolen in polaren Flüssigkeiten (z.B. Wasser) auf.
- **Van-der-Waals-Kräfte:** Auch zwischen Molekülen und Atomen, die keine ionische oder kovalente Bindungen eingehen können, wie dies z.B. bei Helium der Fall ist, gibt es durchaus beträchtliche Anziehungskräfte. Es handelt sich um die so genannten Van-der-Waals-Kräfte. Die Ursache für diese Kräfte sind elektrostatische Anziehungen zwischen induzierten und permanenten Dipolen. Sie sind wesentlich schwächer, als die Coulomb-Kräfte. Deshalb genügt oft schon eine geringe Temperaturerhöhung, um den Zusammenhalt durch die thermische Bewegung zu lösen. Es handelt sich also um Kräfte zwischen antiparallel orientierten temporären Dipolen. Sie entstehen meist durch eine kurzzeitige Ladungsverschiebung in der Elektronenhülle eines Teilchens dessen temporäres Dipolmoment in den benachbarten Teilchen wiederum ein Dipolmoment induziert. Das elektrische Feld des einen Dipols führt zur Ausrichtung des anderen Moleküls. Die Folge ist eine Anziehung. Die Kräfte zwischen nicht benachbarten Teilchen können vernachlässigt werden.
- **Wasserstoffbrücken:** Die durch die Wasserstoffbrückenbindung hervorgerufene Anziehungskraft ist wesentlich stärker, als die durch die Van-der-Waals-Bindungen. Sie sind unter anderem verantwortlich für den relativ hohen Siedepunkt von Wasser. Beim Zustandekommen von Wasserstoffbrückenbindungen wirkt ein Proton als Verbindungsglied zwischen zwei anderen Atomen, die Sauerstoff-, Stickstoff- oder Fluoratome sein können. Am häufigsten treten sie zwischen zwei Sauerstoffatomen auf.
- **Metallische Bindungen:** Dies ist eine ganz außerordentliche Bindungsart. Hier teilen sich nicht zwei oder wenige Atome Elektronen, oder tauschen sie aus, sondern jedes Valenzelektron gehört zu allen Atomen. Diese so genannten Valenzelektronen bilden ein "Elektronengas", das in der dreidimensionalen Anordnung der positiven Atomrümpfe frei beweglich ist. Man kann sagen, die gleichmäßig verteilte negative Ladungsdichte hält die positiven Ionen zusammen.

1.3 Deformationen und Moduln

Unter der Einwirkung von Kräften oder Drücken verändern Festkörper je nach Art der äußeren Einwirkungen ihre Gestalt. Dabei können sich Form, Volumen oder auch beides gleichzeitig ändern. Man unterscheidet dabei noch elastische und plastische Verformungen. Zumindest bis zu einem gewissen Punkt verschwinden mit den angreifenden Kräften auch die Deformationen wieder und der Körper kehrt in seine Ausgangsgestalt zurück. Dann spricht man von elastischen Verformungen. Wird bei der Beanspruchung der Hooke'sche Bereich der Elastizität jedoch verlassen, bilden sich die Verformungen auch nach dem Verschwinden der äußeren Einflüsse nicht mehr (vollständig) zurück. Solche irreversiblen Vorgänge heißen dann plastische Verformungen.

Betrachtet man also den linearen Bereich bei den Deformationen, ergeben sich Proportionalitäten zwischen angreifender Kraft und resultierender Deformation. Als Bindeglied dient dann der jeweilige Modul als materialabhängige Größe. Je nach Art der Deformation unterscheidet man mehrere Moduln:

1.3.1 Dehnung und Elastizitätsmodul

Eine Kraft senkrecht auf eine Fläche A eines Körpers bewirkt eine Längen- und eine Querschnittsänderung (und somit auch eine Form- und Volumenänderung). Da die Kraft senkrecht auf der Fläche angreift, spricht man auch von der Normalkraft.

Das Verhältnis aus Normalkraft und Fläche definiert man dann als Normalspannung σ :

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} \quad (1)$$

Für kleine Normalspannungen gilt dabei, dass die relative Längenänderung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2)$$

proportional zur Normalspannung σ ist. Der für eine Gleichung benötigte Proportionalitätsfaktor wird als Elastizitätsmodul E bezeichnet. Es ergibt sich das HOOKE'sche Gesetz:

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (3)$$

Die Längenänderung Δl hängt also von den Abmessungen des Körpers, der angreifenden Kraft und dem materialspezifischen Elastizitätsmodul ab. Das E-Modul lässt sich auch interpretieren als Verhältnis von notwendiger Spannung zur sich ergebenden relativen Längenänderung.

1.3.2 Kompression und Kompressionsmodul

Ein von allen Seiten homogen wirkender Druck verkleinert das Volumen eines Körpers bei gleich bleibender Form. Analog zum E-Modul wird das Kompressionsmodul K definiert als Verhältnis aus Druckänderung dp und der Volumenänderung ΔV , normiert durch das Anfangsvolumen V :

$$K = -\frac{dp}{\frac{\Delta V}{V}} \quad (4)$$

Das negative Vorzeichen ist notwendig, um bei positiver Druckänderung dp (Zunahme) und resultierender negativer Volumenänderung ΔV (Abnahme) ein positiv definiertes Kompressionsmodul K zu erhalten.

Zusätzlich zum Kompressionsmodul K lässt sich noch die Kompressibilität κ als Reziprokwert definieren:

$$\kappa = \frac{1}{K} \quad (5)$$

1.3.3 Scherung

Eine Kraft muss nicht notwendigerweise senkrecht auf der Fläche angreifen, sondern kann auch tangential daran ziehen. Die Schub- oder Scherspannung erzeugt also eine Verschiebung der gegenüberliegenden parallelen Flächen zueinander (vgl. Würfel), und es ergibt sich der Scherwinkel α an der Seite des Würfels. Als Proportionalitätsfaktor zwischen Scherwinkel α und der angreifenden Scherkraft τ definiert man den Scher- oder Schubmodul G :

$$\tau = G \cdot \alpha \quad (6)$$

Schubspannung und Scherung sind also ebenfalls zueinander proportional.

1.3.4 Spannungstensor

Mit dem Spannungstensor $\vec{\sigma}$ lassen sich alle auftretenden Spannungen eines Körpers beschreiben. Die Elemente σ_{ii} der Hauptdiagonalen bezeichnen dabei die Normalspannungen, die restlichen Komponenten beschreiben die Tangentialspannungen. Beispielsweise wird für einen Würfel das Koordinatensystem geschickt gewählt, so dass die Achsen parallel zu den Kanten des Würfels zeigen. Der erste Index eines Elements im Tensor gibt dann die Flächennormale (bzw. die Richtung) an, während der zweite Index die Richtung der wirkenden Kraft beschreibt.

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

σ_{12} bezeichnet beispielsweise eine Tangentialspannung durch eine Kraft parallel zur x_2 -Achse, die an der Fläche parallel zur $x_2 - x_3$ -Ebene angreift.

Aus dem Kräftegleichgewicht folgt außerdem die Symmetrie des Tensors: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Ohne Kräftegleichgewicht würde der Körper durch die resultierende Kraft in Rotation versetzt werden.

Für die einzelnen Punkte mit dem Ortsvektor \vec{r} gibt es ganz analog einen Dehnungstensor ε , der den Vektor \vec{r} nach einer Dehnung beschreibt:

$$\vec{r}_{neu} = \varepsilon \vec{r}_{alt} \quad (7)$$

Die Hauptdiagonale dieses Tensors ist mit den relativen Längenänderungen $\frac{\Delta l}{l}$ besetzt.

1.3.5 Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Das Gesetz von Hooke und die damit verbundene Proportionalität zwischen Belastung und resultierender Deformation gilt nur bis zu einer sogenannten Proportionalitätsgrenze P . Wird die Belastung noch größer, dehnt sich der Körper verhältnismäßig stärker als im linearen Bereich und das Schaubild krümmt sich nach rechts. Trotzdem können Deformationen nach langsamer Entlastung noch zurückgehen und der Körper in seinen Ausgangszustand zurückkehren. Ist dies nicht mehr der Fall, wurde die Elastizitätsgrenze σ_E überschritten und die Verformungen bleiben (zumindest teilweise) bestehen. Erhöht man die Belastung immer weiter, wird schließlich die Festigkeitsgrenze σ_F überschritten und das Material bricht.

1.3.6 Poisson'sche Zahl

Die relative Querschnitts- und Längenänderung bei Deformationen eines Körpers sind erfahrungsgemäß nicht gleich, die Querschnittsveränderung ε_q ist deutlich kleiner als die Längenänderung ε . Als Verhältnis definiert man sich die POISSON'sche Zahl μ :

$$\mu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} \quad (8)$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= \frac{\Delta d}{d} \\ \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l} \end{aligned}$$

Das Minuszeichen ergibt sich wieder aus der Wahl des positiven Vorzeichens von μ , da die Querschnittsänderung Δd negativ ist (der Querschnitt nimmt bei der Dehnung ab).

Betrachtet man die Dehnung eines Stabs quadratischer Grundfläche d^2 und Länge l , ergibt sich folgende Volumenänderung:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_{neu} - V_{alt} \\ &= (l + \Delta l)(d + \Delta d)^2 - d^2 l \\ &= d^2 l + 2dl\Delta d + l\Delta d^2 + d^2\Delta l + 2d\Delta d\Delta l + \Delta l\Delta d^2 - d^2 l\end{aligned}$$

Vernachlässigt man nun kleine Terme (Δd^2 , $\Delta d\Delta l$) und fasst zusammen, erhält man:

$$\Delta V = d^2\Delta l + 2dl\Delta d$$

Für die relative Volumenänderung gilt damit:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \frac{d^2\Delta l + 2dl\Delta d}{d^2 l} \\ &= \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d}\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu) \quad (9)$$

Unter der durchaus plausiblen Annahme, dass sich das Volumen des Körpers bei der Dehnung nicht verringert, folgt aus der obigen Gleichung:

$$1 - 2\mu \geq 0 \implies \mu \leq \frac{1}{2} \quad (10)$$

Die Praxis bestätigt diese Grenze, die im Experiment ermittelten Werte für die POISSON-Zahl liegen zwischen 0,2 und 0,5.

2 Herleitungen zum Versuch

2.1 Biegekurve eines Balkens

Wirkt auf einen auf einer Seite eingespannten Balken (z.B. ein dünnes Metallband) eine Kraft nach unten, so krümmt sich der Balken ebenfalls nach unten. Allerdings lässt sich nur schwer abschätzen welche Biegekurve der Balken denn genau beschreibt.

Für die Herleitung der Biegekurve betrachtet man einen einseitig eingespannten Balken der Gesamtlänge L , Breite b und Dicke d . Die unteren Schichten des eingespannten Balkens werden bei einer Biegung offensichtlich etwas zusammengestaucht, während die oberen Schichten in die Länge gezogen werden. Dazwischen gibt es offensichtlich eine Schicht mit gleich bleibender Länge, die neutrale Faser. An den genannten Deformationen erkennt man bereits einen Zusammenhang von Biegeverhalten und E-Modul des Balkens.

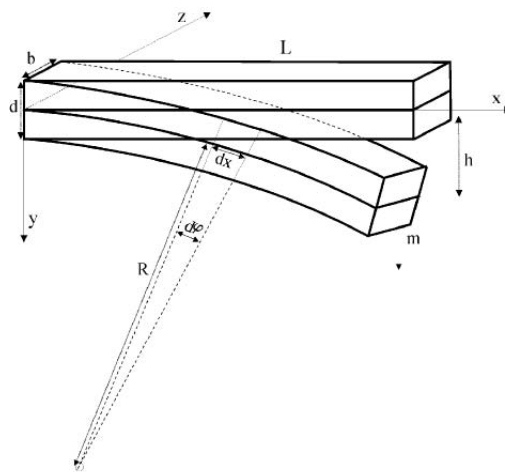


Abbildung 1: Quelle: Protokoll von Wagner u. Birnesser^[9]

Zunächst wählt man das Koordinatensystem der Einfachheit halber gerade so, dass die neutrale Faser an der eingespannten Stelle im Ursprung zu liegen kommt. Da die Biegekurve vermutlich weder eine exakte Parabel noch einen Kreisbogen beschreiben wird, betrachtet man zunächst nur einen differenziell kleinen Ausschnitt dx der neutralen Faser des Stabs an der Stelle x . Dieser lässt sich nun als Kreisbogen mit dem Radius R und dem Öffnungswinkel $d\varphi$ nähern und es gilt:

$$d\varphi = \frac{dx}{R}$$

Für den gleichen Winkel gilt bei einer um z höher im Stab gelegenen Schicht

$$d\varphi = \frac{dx + dl}{R + z}$$

wobei dl die Verlängerung der Strecke dx in der im Abstand z höher liegenden Schicht ist. Setzt man die Winkel gleich erhält man nun

$$\begin{aligned}\frac{dx}{R} &= \frac{dx + dl}{R + z} \\ \implies \frac{dx + dl}{dx} &= \frac{R + z}{R} \\ \implies \frac{dl}{dx} &= \frac{z}{R}\end{aligned}$$

Durch die relative Längenänderung $\varepsilon = \frac{dl}{dx}$ lässt sich jetzt die Gleichung mit der Spannung verknüpfen:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{dl}{dx} \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \\ \implies \sigma &= E\varepsilon = \frac{Ez}{R}\end{aligned}$$

Die Spannung σ ist definiert als Kraft F pro Querschnittsfläche A , und in differenzieller Schreibweise ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{F}{A} = \frac{Ez}{R} \\ A \rightarrow dA &= b dz \\ \implies dF &= \frac{Eb}{R} z dz\end{aligned}$$

Diese differenzielle Kraft kann nun integriert werden und man erhält die Kraft auf den gesamten Querschnitt. Die Symmetrie der Integrationsgrenzen ergibt sich aus der Überlegung, dass die Kraft auf jeden Querschnitt gleich null sein. Sonst würde sich ein homogener Körper bewegen, was hier jedoch nicht der Fall ist. Die neutrale Faser muss also in der Mitte liegen, und es wird in z -Richtung von $-d/2$ bis $+d/2$ integriert.

Die am Balkenende angreifende Kraft erzeugt ein Drehmoment am betrachteten Punkt x mit der restlichen Balkenlänge als Hebelarm:

$$M_{\text{au\ss en}} = F(L - x)$$

Da der Balken jedoch nicht in Rotation versetzt wird, muss dem \u00e4u\u00dferen Drehmoment $M_{\text{au\ss en}}$ ein gleich gro\u00dfes inneres Drehmoment entgegen wirken. Dieses Drehmoment setzt sich aus den differenziellen Drehmomenten zusammen, die durch die Biegespannung entstehen. Als Hebel dient dabei die z -Komponente (der Abstand zur neutralen Faser):

$$dM_{\text{innen}} = zdF$$

Das Gesamtdrehmoment erh\u00e4lt man aus der Integration \u00fcber die gesamte Dicke, wobei die Grenzen wie in der vorigen \u00dcberlegung bestimmt werden:

$$M_{\text{innen}} = \int zdF = \frac{Eb}{R} \int_{-d/2}^{+d/2} z^2 dz = \frac{Ed^3b}{12R}$$

Die Drehmomente gleichgesetzt ergeben dann:

$$\begin{aligned} \frac{Ed^3b}{12R} &= F(L - x) \\ \frac{1}{R} &= \frac{12}{Ed^3b} F(L - x) \end{aligned}$$

Der Kehrwert des Radiuses entspricht der Kr\u00fcmmung der Biegekurve. Die Gleichung f\u00fcr eine beliebige Kurve lautet allgemein

$$\frac{1}{R} = \frac{\pm z''(x)}{(1 + z'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Der Nenner des Bruchs kann nun durch eine 1 angen\u00e4hert werden, da nur sehr kleine Kr\u00fcmmungen betrachtet werden sollen. Da die Kr\u00fcmmung positiv ist, die Biegung des Stabs aber nach unten entgegen der z -Achse verl\u00e4uft und somit negativ ist, betrachtet man den Fall mit dem negativen Vorzeichen. Durch zweimaliges Integrieren erh\u00e4lt man dann

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{12F}{Ed^3b} \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right) + \text{const}_1 \\ z(x) &= \frac{6F}{Ed^3b} \left(\frac{x^3}{3} - Lx^2 \right) + \text{const}_1 x + \text{const}_2 \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen lassen sich die Integrationskonstanten bestimmen. Am eingespannten Ende des Balkens erfolgt keine Biegung nach unten, und die neutrale Faser verläuft durch den Ursprung. Somit müssen $z(x=0) = 0$ und $z'(x=0) = 0$ gelten und man kann die Integrationskonstanten berechnen: $const_1 = const_2 = 0$. Daraus folgt dann die Funktion für die Biegelinie:

$$z(x) = \frac{6F}{Ed^3b} \left(\frac{x^3}{3} - Lx^2 \right) \quad (11)$$

Die Biegung beschreibt also nicht wie vielleicht anfangs vermutet einen Kreisbogen, sondern verläuft wie ein Polynom dritten Grades.

Der gesuchte Biegepfel entspricht der Auslenkung in z -Richtung am Ende des Balkens, also an der Stelle $x = L$. Diese Bedingung eingesetzt ergibt:

$$s = -\frac{4L^3}{Ed^3b}F \quad (12)$$

Die Kraft F entspricht im Experiment der Gewichtskraft der angehängten Gewichte einschließlich Waagschale.

Die hergeleitete Gleichung gilt jedoch nur unter bestimmten Voraussetzungen, da bei der Herleitung einige Näherungen gemacht wurden. Durch die gewählten Anfangsbedingungen zur Berechnung der Integrationskonstanten verliert die Gleichung ihre Gültigkeit, sobald größere Biegungen untersucht werden. Wie sich bei der Herleitung herausstellte, beschreibt die Biegekurve auch keinen Kreisabschnitt. Bei der späteren Integration wurde von konstanter Breite und Dicke des Balkens ausgegangen, was im Experiment nicht ganz zutreffen wird. Der als überall konstant angenommene E-Modul setzt außerdem noch einen homogenen Körper voraus, da sonst die Elastizität des Stabs nicht als Konstante einfließen darf sondern ebenfalls integriert werden muss.

2.2 Biegeschwingung eines eingespannten Balkens

Die theoretische Herleitung wurde dem Protokoll von Frank Sperka^[8] entnommen. Spannt man einen Balken hochkant in einer Spannschraube ein und lenkt das andere Ende in horizontaler Richtung aus, so führt der Balken durch die rücktreibenden Kräfte aus der Dehnung und Stauchung eine Schwingung durch. Um die Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom E-Modul zu erhalten, betrachtet man eine differenzielle Massescheibe mit dem Abstand \tilde{x} zur betrachteten Stelle x mit der Dicke $d\tilde{x}$. Sie besitzt die Masse

$$dm = \rho A d\tilde{x}$$

und erfährt bei einer beschleunigten Bewegung wie der Schwingung die Kraft

$$dF = dm \cdot \ddot{z}(\tilde{x})$$

Dadurch wird an der Stelle x das Drehmoment

$$dM_a = dF(\tilde{x} - x) = dm\ddot{z}(\tilde{x})(\tilde{x} - x)$$

mit $dm = \rho A d\tilde{x}$ erzeugt. Da jedoch alle Massenscheibchen von der betrachteten Stelle x bis zur Gesamtlänge L des Stabs beschleunigt werden, wird über diesen Bereich aufintegriert:

$$M_a = \rho A \int_x^L \ddot{z}(\tilde{x})(\tilde{x} - x)d\tilde{x} = M(x)$$

Gesucht ist nun die Beschleunigung, die man nach zweimaliger Differentiation nach x isolieren kann:

$$\begin{aligned} \frac{dM_a}{dx} &= -\rho A \int_x^L \ddot{z}(\tilde{x})d\tilde{x} = \rho A \int_L^x \ddot{z}(\tilde{x})d\tilde{x} \\ \frac{d^2 M_a}{dx^2} &= \rho A \ddot{z}(x) \end{aligned}$$

Wie zuvor bereits hergeleitet wurde, gilt für das innere Drehmoment

$$M_i = -\frac{Ed^3b}{12} z''(x) = -\frac{Ed^2A}{12} z''(x)$$

bzw. für die zweite Ableitung nach x

$$\frac{d^2 M_i}{dx^2} = -\frac{Ed^2A}{12} z^{(4)}(x)$$

Nun kann man diese Ableitungen von innerem und äußerem Drehmoment gleichsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_a}{dx^2} &= \frac{d^2 M_i}{dx^2} \\ \implies \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{Ed^2}{12\rho} \frac{d^4 z}{dx^4} \end{aligned}$$

Diese von der Zeit und dem Ort abhängige Differenzialgleichung ist sehr kompliziert zu lösen. Eine ausführliche Rechnung findet man in folgendem Buch:

A. BUDO: Theoretische Mechanik Band 25
6. Auflage, S. 386, S. 416ff.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972

Als Lösung für die Differenzialgleichung oben erhält man dann

$$z(x, t) = \hat{z}_n(x) \sin(2\pi\nu_n t + \alpha_n)$$

Der Index n bezeichnet dabei die verschiedenen Moden der Schwingung. Im Versuch soll lediglich die Grundfrequenz $n = 1$ betrachtet werden. Als Lösung erhält man hierfür

$$\nu_1 = \frac{1,875^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{Ed^2}{12\rho}}$$

Die weiteren Schwingungsmoden höherer Ordnung wurden für das Experiment nicht berücksichtigt. Aus der Lösung der Differenzialgleichung mit der Grundfrequenz $n = 1$ folgt schließlich für das E-Modul des Balkens:

$$E = \left(\frac{2\pi L^2}{1,875^2} \right)^2 \frac{\rho b d}{IT^2} \quad (13)$$

mit $I = \frac{1}{12}bd^3$. Bei vorher bestimmten Abmessungen des Balkens lässt sich nun über die Schwingungsdauer T der E-Modul des Materials bestimmen.

3 Versuchsbeschreibung

3.1 Biegekurve eines Balkens

Im ersten Versuchsteil wurde ein Metallstreifen hochkant in einer Spannschraube eingeklemmt, so dass er horizontal in etwa 1mm Abstand (und damit ohne Reibung an der Unterlage) über dem Tisch mit dem aufgeklebten Millimeterpapier schwebte. Mit einem Lineal konnte man nun die effektive Länge, den Abstand vom Ende des Metallstreifens zur Einspannkante an der Schraube messen. Die Nulllage des Balkens wurde auf dem Millimeterpapier festgehalten und anschließend in die über eine Umlenkrolle am Ende des Balkens angebrachte Waagschale insgesamt zehn Massestücke gelegt. Bei jedem neuen Massenstückchen wurde nach kurzem Einpendeln die neue Auslenkung markiert und exemplarisch bei maximaler Auslenkung mit allen Massenstückchen die Biegekurve des gesamten Balkens nachgezogen.

Um Verformungen der schon etwas in Mitleidenschaft gezogenen Balken zu kompensieren, wurde jeder Streifen gewendet und insgesamt viermal eingespannt. Die Messungen wurden für einen Aluminium- und für einen Kupferstreifen durchgeführt. Die aufgelegten Massestückchen hatten leicht unterschiedliche Größen und Massen und wurden auch in zufälliger Reihenfolge aufgelegt, wodurch die Belastung nicht ganz linear zunahm.

Für die Auswertung wurde jeweils mit dem Mittelwert der Massestückchen gerechnet:

Massenstück	Masse in g
1	1,086
2	1,083
3	1,072
4	1,098
5	1,086
6	1,090
7	1,063
8	1,074
9	1,074
10	1,093
Mittelwert	1,082
Standardabw.	0,0034
Waagschale	4,06
Messgenauigkeit	$\pm 1\text{mg}$

Für die Versuchsauswertung wird für die Massenstücke also eine Masse von $(1,082 \pm 0,0034)\text{g}$ angesetzt, während für die Waagschale mit einer Masse von $(4,06 \pm 0,001)\text{g}$ gerechnet wird.

3.1.1 Der Kupferstreifen

Zuerst wurde ein Kupferstreifen der Breite $(1,52 \pm 0,005)$ cm und der Dicke $(0,5 \pm 0,01)$ mm eingespannt. Die Breite der Metallstreifen stammt aus dem Protokoll von Wetzels/Fritzes/Seidenstücker^[10], da wir es versäumten diese Werte selbst zu messen.

Massestücke	Biegepeile in cm ($\pm 0,5$ mm)			
	Messreihe 1	Messreihe 2	Messreihe 3	Messreihe 4
0	1,35	1,40	1,55	1,75
1	1,75	1,75	1,95	2,25
2	2,15	2,20	2,35	2,70
3	2,50	2,55	2,75	3,20
4	2,75	2,95	3,15	3,65
5	3,30	3,35	3,55	4,10
6	3,60	3,70	3,95	4,55
7	4,00	4,05	4,30	4,95
8	4,35	4,40	4,65	5,35
9	4,70	4,70	5,05	5,75
10	5,05	5,05	5,40	6,15
Länge in cm	28,10	27,65	28,80	29,80

Aus den jeweils 11 Messwerten der 4 Messungen erhält man mit den hergeleiteten Formeln folgende E-Module:

	Messreihe 1	Messreihe 2	Messreihe 3	Messreihe 4
Länge in cm	28,10	27,65	28,80	29,80
E-Modul in 10^{10} Pa	13,51	12,62	13,26	12,79
Gauss in 10^{10} Pa	0,86	0,80	0,83	0,80

Der Gauss-Fehler setzt sich zusammen aus

$$\sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial m_S} \Delta m_S\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial m_{MS}} \Delta m_{MS}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial s} \Delta s\right)^2}$$

mit den Messungenauigkeiten $\Delta L = 0,5$ mm, $\Delta b = 0,05$ mm, $\Delta d = 0,01$ mm, $\Delta m_S = 1$ mg, $\Delta m_{MS} = 3,4$ mg und $\Delta s = 0,5$ mm.

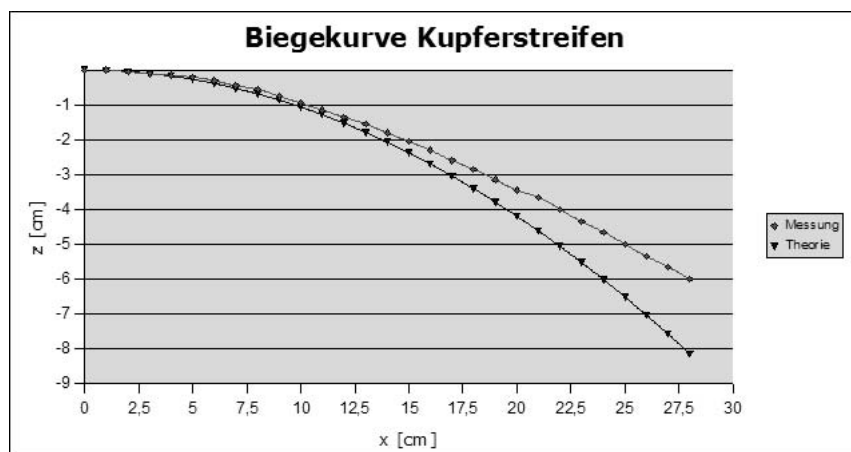
Die am Balken angreifende Kraft setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft der Waagschale ($g \cdot m_S$) und der Gewichtskraft der Massenstücke ($g \cdot n \cdot m_{MS}$).

Es ergibt sich für den E-Modul des Kupferbalkens ein Mittelwert von $(13,04 \pm 0,082) \cdot 10^{10}$ Pa, was etwas über dem Theoriewert¹ von $12,80 \cdot 10^{10}$ Pa liegt.

Der zu hohe Wert für den E-Modul lässt auf eine zu hohe Kraft bzw. einen zu kurzen Biegefeil schließen. Da aber gegebenenfalls noch Reibung am Millimeterpapier oder der Umlenkrolle zu berücksichtigen wäre, welche die resultierende Kraft verringern würden, liegt die Ursache für die Abweichung wohl im Angriffspunkt der Kraft. Da der Metallstreifen eine glatte Oberfläche hatte und die nur lose eingehängte Schlaufe der Schnur bei großen Auslenkungen des Balkens zu rutschen begann, musste der Faden etwas weiter innen angesetzt werden. Dadurch verringerte sich der Hebelarm für das Drehmoment und die Auslenkung wurde geringer als erwartet.

Die für die unterschiedlichen Einspannrichtungen abweichenden Werte lassen sich durch einseitige Überbeanspruchung des Streifens erklären, was angesichts seines Zustands plausibel klingt.

Grafisch dargestellt erkennt man gleich, dass die Biegekurve des Streifens über der Theoriekurve liegt (kleinere Auslenkung \leftrightarrow größerer E-Modul):



3.1.2 Der Aluminiumstreifen

Die Messreihe wurde nun analog für einen Streifen aus Aluminium wiederholt, der eine mittlere Breite von $(2,035 \pm 0,005)$ cm besaß und $(0,5 \pm 0,01)$ mm dick war:

Massestücke	Biegepeile in cm ($\pm 0,25$ mm)			
	Messreihe 1	Messreihe 2	Messreihe 3	Messreihe 4
0	1,65	1,75	2,00	2,15
1	2,05	2,20	2,50	2,65
2	2,55	2,60	3,05	3,35
3	3,00	3,05	3,55	3,90
4	3,45	3,45	4,05	4,45
5	3,90	3,90	4,60	5,00
6	4,35	4,30	5,10	5,55
7	4,80	4,70	5,60	6,05
8	5,20	5,10	6,05	6,60
9	5,65	5,45	6,40	7,05
10	6,00	5,90	6,80	7,85
Länge	26,70	27,50	28,25	29,35

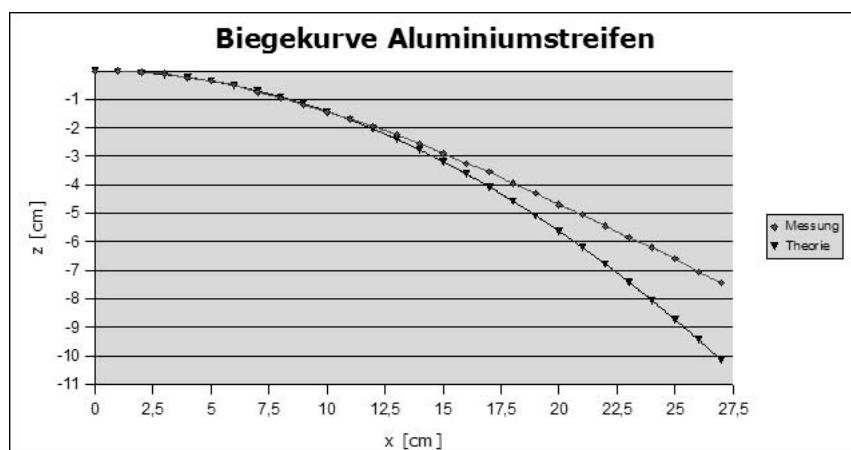
Damit errechnen sich für die Mittelwerte des E-Moduls:

	Messreihe 1	Messreihe 2	Messreihe 3	Messreihe 4
Länge in cm	26,70	27,50	28,25	29,35
E-Modul in 10^{10} Pa	7,18	7,81	7,24	7,42
Gauss in 10^{10} Pa	0,45	0,49	0,45	0,46

Wieder ist unser Mittelwert von $(7,41 \pm 0,46) \cdot 10^{10}$ Pa etwas größer als der Theoriewert¹ von $7,00 \cdot 10^{10}$ Pa. Dies lässt sich wieder durch einen zu kurzen Hebelarm für die angreifende Kraft erklären.

Die größere Abweichung könnte daher kommen, dass der Aluminiumstreifen besser erhalten war und deswegen der mangelnde Hebelarm nicht so sehr durch Ermüdungserscheinungen kompensiert wurde wie es beim Kupferstreifen wohl der Fall war.

Wie auch beim Kupferstreifen liegt hier die Biegekurve über der Theoriekurve:



3.2 Biegeschwingung eines eingespannten Balkens

Bei der dynamischen Methode wurde wieder ein Metallstreifen eingespannt, der nach einer Auslenkung eine Schwingung ausführt und dabei periodisch eine Lichtschranke unterbricht. Aus dieser Schwingungsdauer lässt sich dann nach den hergeleiteten Formeln der E-Modul berechnen.

3.2.1 Der Aluminiumstreifen

Mit dem Aluminiumstreifen wurden wiederum vier Messreihen mit unterschiedlichen Einspannlängen durchgeführt. Dabei wurden jeweils die Periodendauer von 10 Schwingungen notiert. Um möglichst gleichmäßige Werte für eine spätere Mittelwertbildung zu erhalten, wurden jeweils 5 Schwingungen aufgezeichnet und danach mit gleicher Amplitude neu ausgelenkt.

Für die Auswertung benötigt man noch das Trägheitsmoment $I = \frac{1}{12}bd^3 = (2,12 \pm 0,13) \cdot 10^{-13} \text{m}^4$ sowie die Dichte¹ $\rho = 2703 \text{kg/m}^3$ für Aluminium. Das Fehlerintervall des Trägheitsmoments ergibt sich wieder aus den Messungenauigkeiten wie beim Biegeversuch.

Aus den Messwerten

Schwingung	Zeit in 1/10 ms			
	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Messung 4
1	1841	2022	2218	1644
2	1832	2019	2223	1639
3	1834	2021	2221	1639
4	1831	2020	2213	1638
5	1826	2021	2219	1634
6	1837	2021	2219	1634
7	1832	2022	2223	1638
8	1829	2019	2218	1638
9	1826	2020	2220	1637
10	1829	2020	2215	1639
Mittelwert	1831,7	2020,5	2218,9	1638

errechnet man dann die E-Moduln:

	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Messung 4
Länge in cm	27,2	28	29,45	25,65
E-Modul in GPa	67,61	62,40	63,32	66,86
Gauss-Fehler in GPa	2,85	2,61	2,63	2,84

Der Mittelwert von $(65,05 \pm 2,73)$ GPa liegt diesmal unterhalb des Theoriewerts¹ von 70 GPa. Als Messungenauigkeiten wurden $\Delta L = 0,5\text{mm}$, $\Delta d = 0,01\text{mm}$ sowie $\Delta T = 1\text{ms}$ angenommen.

4 Fehlerbetrachtung

Insgesamt sind die Messwerte mehr oder minder nahe am erwarteten Theoriewert, allerdings fällt das unterschiedliche Ergebnis für die verwendeten Methoden auf. Während beim statischen Verfahren stets etwas zu große Werte für den E-Modul gemessen wurden, sind die Messwerte bei der dynamischen Methode deutlich darunter. Möglicherweise wirken sich die Materialermüdungen bei der Schwingung deutlicher aus als beim langsamen, statischen Versuchsteil. Während beim dynamischen Fall ein geringerer E-Modul als erwartet sich auch entsprechend zu erkennen gibt, muss bei der statischen Methode der Angriffspunkt der Kraft als Fehlerquelle berücksichtigt werden (diesen gibt es bei der dynamischen Methode ja nicht). So kann auch trotz Materialermüdung für den statischen Fall ein zu großes E-Modul erhalten werden, wie es bei uns im Experiment der Fall war. Ein deutliches Anzeichen für den schlechten Zustand der Metallstreifen sind die je nach Einspannrichtung unterschiedlichen Ergebnisse für den E-Modul. Erwartet wird hier selbstverständlich ein einheitliches Resultat. Die aber schon optisch zu erkennende Überbeanspruchung der Streifen lässt dies nicht zu, und schnell hat man die ausschlaggebende Fehlerquelle gefunden.

5 Literaturverzeichnis

1. Dieter Meschede: Gerthsen Physik
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002, 21.Auflage
2. Demtröder: Experimentalphysik 1 (Mechanik und Wärme)
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004, 3.Auflage
3. Horst Kuchling: Taschenbuch der Physik^[1]
Fachbuchverlag Leipzig, 2004, 18.Auflage
4. P.A. Tipler: Physik
Spektrum Akademischer Verlag Berlin Oxford, 1995, 1.Auflage
5. W.Walcher: Praktikum der Physik
Teubner Studienbücher Physik, 1989, 6.Auflage
6. Skript zur Vorlesung Grundlagen I von Prof. P.C.Hägele, 2004-2005
7. F.K.Kneubühl: Repetitorium der Physik
Teubner Studienbücher, 1995
8. Frank Sperka: Protokoll zum Versuch 'Elastizitätskonstante von kristallinen Festkörpern'
9. Andreas Birnesser u. Sascha Wagner: Protokoll zum Versuch 'Elastizitätskonstante von kristallinen Festkörpern'
10. Dominik Wetzel, Daniel Fritz u. Axel Seidenstücker: Protokoll zum Versuch 'Elastizitätskonstante von kristallinen Festkörpern'