

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	1
---------------------------	---

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie	2
1.1 Aufbau von Festkörpern	2
1.2 Bindungen von Festkörpern	4
1.3 Moduln, Spannung und Dehnung	4
1.4 Der Elastizitätsmodul	6
1.5 Der Schubmodul	7
1.6 Der Kompressionsmodul	8
1.7 Tensorcharakter der elastischen Konstanten	8
1.8 Biegung eines einseitig eingespannten Balkens	9
1.9 Die Frequenz der Biegeschwingung	11
2 Experiment	13
2.1 Statisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls	13
2.2 Dynamisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls	15
2.3 Vergleich von statischer und dynamischer Methode	16

1 Theorie

siehe auch [1]

1.1 Aufbau von Festkörpern

Für den Aufbau von Festkörpern gibt es prinzipiell zwei verschiedene Möglichkeiten. Einerseits die amorphe Form, bei der das Gitter keinerlei Ordnung aufweist, andererseits die kristalline Form, mit der regelmäßigen Anordnung der atomaren Bausteine.

Amorphe Form: Amorphe Körper besitzen in ihrem Aufbau keine Fernordnung. Sie entstehen dann, wenn man eine Flüssigkeit so schnell abkühlt, d.h. ihr so schnell die innere Energie entzogen wird, dass sich die Moleküle nicht zu einer neuen Struktur anordnen können. Amorphe Körper besitzen keinen definierten Schmelzpunkt, sondern sie gehen beim Erwärmen allmählich in den echten flüssigen Zustand über. In der Literatur werden sie deshalb häufig den Flüssigkeiten mit einer sehr hohen Viskosität zugeordnet. Beispiele sind Wachs, Teer und natürlich auch Glas.

Kristalline Form: Die Struktur aller kristallinen Körper ist durch eine bestimmte, regelmäßige räumliche Anordnung gekennzeichnet. Man kann ihre Struktur anhand eines Modells verdeutlichen. Als Ausgangspunkte wählt man sogenannte Basisatome bzw. Basismoleküle, die in periodischen Abständen aneinandergereiht sind. Die Periodizität erlaubt es, das Gitter als Vielfaches einer Einheit, der Elementarzelle, zu beschreiben. Auguste Bravais wies auf mathematischem Wege nach, dass es 14 mögliche Formen dieser Elementarzelle gibt. Die 14 Bravaiszellen lassen sich zu sieben Kristallfamilien zusammenfassen: triklin, monoklin, rhombisch, trigonal, tetragonal, hexagonal und kubisch. Das Gitter des kristallinen Körpers lässt sich durch Symmetrioperationen auf die jeweilige Bravaiszelle aufbauen. Alle Bereiche des kristallinen Festkörpers befinden sich daher in einer wohldefinierten Lage bzw. Orientierung zueinander. Diese Eigenschaft des kristallinen Festkörpers ist in der Festkörperphysik enorm wichtig und wird als Fernordnung bezeichnet.

Idealer Kristall Er ist durch eine streng gesetzmäßige Anordnung der Atome oder Ionen definiert. Die Realkristalle unterscheiden sich aufgrund ihres Entstehungsprozesses von den Idealkristallen dadurch, dass sie Fehlordnungen aufweisen. Man klassifiziert diese Kristallbaufehler nach ihrer geometrischen Ausdehnung. Die nulldimensionalen Fehlordnungen werden als Punktfehler bezeichnet, die eindimensionalen sind die sogenannten Versetzungen und zu den zweidimensionalen gehören Flächen im Kristall, an denen die Gitterperiodizität unterbrochen ist.

Punktfehler Der einfachste denkbare Punktfehler besteht darin, dass ein Atom irgendwo in der Struktur fehlt. Statt dessen befindet sich an diesem Platz eine Leerstelle. Derartige Punktfehler bezeichnet man als Schottky-Defekte. Umgekehrt kann auch ein zusätzliches Atom der gleichen Art in der Gitterstruktur vorhanden sein. Es befindet sich dann als Zwischengitteratom auf einem Zwischengitterplatz. Diese Fehlordnung nennt man Anti-Schottky-Defekt. Treten beide Defekte gekoppelt auf, so dass ein Atom seinen Platz in der Gitterstruktur verlässt und sich an einer Zwischengitterstelle einlagert, so spricht man von Frenkel-Defekten. Aufgrund der thermischen Energie eines kristallinen Körpers sind die genannten Punktfehler stets vorhanden und werden auch Eigenfehlordnungen genannt.

Chemische Fehlordnungen Chemische Fehlordnungen treten auf, wenn Fremdatome auf regulären Gitterplätzen oder auch Zwischengitterplätzen eingebaut werden. Sind die Fremdatome wesentlich kleiner als die Atome des Gitters, so werden sie meist in das Zwischengitter eingebaut. Dies wirkt sich auch auf die optischen und elektrischen Eigenschaften des kristallinen Festkörpers aus.

Versetzungen Eine Versetzung kann im Modell folgendermaßen verdeutlicht werden. Der Kristall wird entlang einer Schnittfläche teilweise aufgetrennt. Dann wird ein Teil der Netzebene, im Grenzfall nur eine Atomschicht, um einen geringen Betrag nach unten versetzt. Anschließend wird der Kristall wieder zusammengesetzt. Im Realfall kann eine solche Versetzung durch äußere Krafteinwirkungen entstehen.

Zweidimensionale Defekte An der Korngrenze stoßen jeweils zwei Kristallindividuen aneinander. Zur Kennzeichnung muss die gegenseitige Orientierung der Körner genau bestimmt werden. Zu den zweidimensionalen Defekten gehören beispielsweise die Oberflächen jedes realen Kristalls. Kristalline Körper, welche nur Punktfehler und Versetzungen aufweisen, werden als Einkristalle bezeichnet. Ist der Festkörper jedoch aus zwei gegeneinander verdrehten Einkristallen zusammengesetzt, so spricht man von einem Bikristall. Bei einem Polykristall treten im Festkörper viele verschieden orientierte Einkristalle auf. Betrachtet man die physikalischen Eigenschaften, wie z.B.: Wärmeleitfähigkeit, elektrische Leitfähigkeit, Lichtgeschwindigkeit etc., so gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten:

- Die physikalischen Eigenschaften sind in allen Richtungen gleich. Dieses Verhalten wird als isotrop bezeichnet.
- Die physikalischen Eigenschaften variieren mit der Richtung, in

der sie gemessen werden. Dieses Verhalten wird als anisotrop bezeichnet.

Ist der Festkörper stofflich und physikalisch nicht einheitlich und gleichmäßig gebaut, so ist er heterogen.

Erweist er sich bezüglich seiner stofflichen Eigenschaften als Einheit, so ist er homogen.

1.2 Bindungen von Festkörpern

Der Aufbau der Kristallstruktur aus Atomen wird neben den geometrischen Prinzipien auch sehr stark von den zwischenatomaren Kräften beeinflusst. Diese Bindungskräfte treten in vier verschiedenen Bindungstypen zum Vorschein: Ionare, kovalente, metallische und Van-der-Waals-Bindungen.

- **Ionenbindungen:** Bei diesem Bindungstyp gehen ein oder mehrere Elektronen von einem Atom auf das andere über. So entstehen zwei gegensätzlich geladene, sich anziehende Ionen.
- **Kovalente Bindung:** Diese Bindung kommt dadurch zustande, dass sich äußere Elektronen der beteiligten Atome zu Paaren verbinden und so gemeinsam im Potentialfeld beider Atome bewegen. Die beteiligten Atome bleiben im Unterschied zur Ionenbindung im zeitlichen Mittel elektrisch neutral.
- **Metallische Bindungen:** Bei der metallischen Bindung wird die dreidimensionale Anordnung aus positiven Atomrümpfen vom Elektronengas, das von den Valenzelektronen herrührt, zusammengehalten.
- **Van-der-Waals-Bindung:** Die Van-der-Waals-Bindung beruht auf einer schwach anziehenden Dipol-Dipol-Wechselwirkung. Diese tritt auf, wenn in den Kristallatomen oder -molekülen gegenseitig momentane Dipolmomente induziert werden. Die Wechselwirkung dieser induzierten Dipolmomente führt zu einer schwachen elektrischen Anziehungskraft.

1.3 Moduln, Spannung und Dehnung

Festkörper können unter Einwirkung von äußeren Kräften ihre Form und ihr Volumen ändern. Bleibt die aufgebrachte Kraft unter einem Schwellenwert, so bilden sich die Veränderungen nach dem Wegnehmen der Kraft wieder zurück. Der Körper nimmt sein ursprüngliches Volumen und seine ursprüngliche Form ein. Diese Eigenschaft der Festkörper bezeichnet man als Elastizität. Erfolgt diese Volumen- bzw. Formänderung mit annähernd Schallgeschwindigkeit im betreffenden Festkörper, so nennt man dieses Verhalten

Elastizität im engeren Sinne. Beansprucht die Volumen- bzw. Formänderung mehr Zeit, als der Schall für die Durchquerung des Körpers benötigt, dann spricht man von Anelastizität. Oft bleibt ein Teil der Verformung des Festkörpers nach der Wegnahme der Kraft bestehen und bildet sich auch nicht nach längerer Zeit zurück. Die Verformung ist also irreversibel. Bei solchen Phänomenen, die von bleibender Dauer sind, spricht man von plastischer Verformung.

Unter der Normalspannung σ versteht man den Quotienten aus einer Kraft F und der Fläche A , auf welcher die Kraft F senkrecht im Zentrum angreift, d.h.

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A}. \quad (1)$$

Oft spricht man von Druck- bzw. Zugspannung. Wirkt auf die Fläche eines Körpers der Länge l eine senkrechte Kraftkomponente, so bewirkt diese eine Längenänderung Δl . Als Dehnung ε definiert man

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2)$$

Greift die Kraft F parallel zur Fläche A an, so erfährt der Körper die Scherspannung τ :

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad (3)$$

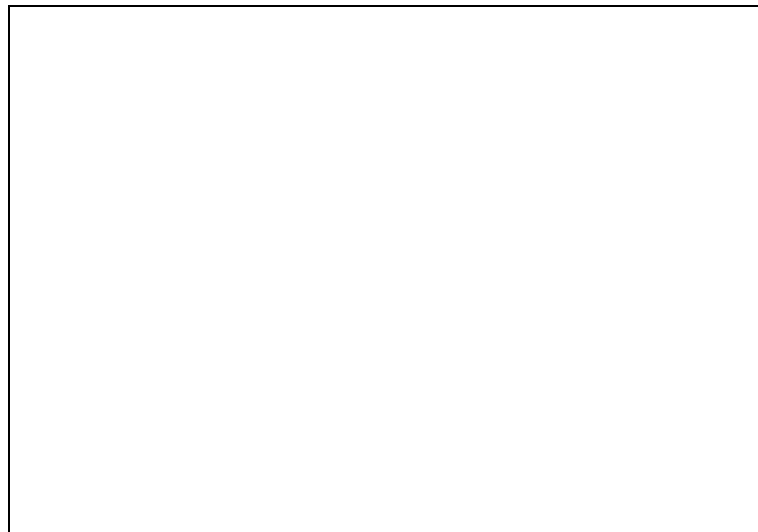


Abbildung 1: Spannungs-Dehnungs-Kurve

Mit den Größen ε und σ lässt sich das Verhalten eines gewöhnlichen Metalls bei angelegter Spannung darstellen. Obwohl dabei die Spannung die

unabhängige und die Dehnung die abhängige Variable ist, hat es sich eingebürgert, auf die Ordinate solcher Spannungs-Dehnungs-Diagramme σ und auf der Abszisse ε abzutragen. Dies rührt von den technischen Messverfahren her.

Bis zur Proportionalitätsgrenze hängen Spannung und Dehnung linear voneinander ab. In diesem Bereich gilt das Hookesche Gesetz $\sigma \sim \varepsilon$. Erhöht man die Spannung weiter, so folgt die Dehnung nicht mehr linear. Bis zum Erreichen der Elastizitätsgrenze ist jede Verformung reversibel. Man befindet sich im elastischen Bereich. Es schließt sich der plastische Bereich an, in dem die Verformung nicht mehr auf den Ausgangspunkt zurück geht. Aufgrund der Aufweichung der Struktur flacht die Kurve ab und der Körper beginnt zu fließen. Ist schließlich der Bruchpunkt erreicht, zerreißt die Probe.

Mit Hilfe der Spannungs-Dehnungs-Kurve können elastische Konstanten definiert werden. Diese charakterisieren die Verformbarkeit des Körpers, genauer gesagt geben sie den Widerstand an, den ein Körper einer Verformung entgegensetzt.

1.4 Der Elastizitätsmodul

Auf einen Körper mit der Oberfläche A wirkt die Zugspannung σ . Für den Hookeschen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Kurve definiert man die Steigung der Kurve als Elastizitätsmodul E :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F \cdot l}{A \cdot \Delta l} \quad (4)$$

Poissonsche Zahl: Außer einer Längenänderung tritt bei der Dehnung eines quaderförmigen Körpers mit quadratischer Grundfläche der Länge l auch eine Querkontraktion auf, d.h. die Dicke d nimmt um Δd ab. Es gilt nach dem Hookeschen Gesetz:

$$\frac{\Delta l}{l} \sim \frac{\Delta d}{d} \quad (5)$$

Die Proportionalitätskonstante heißt Poissonsche Zahl μ :

$$\mu = \frac{\Delta d \cdot l}{d \cdot \Delta l} \quad (6)$$

Berechnung der Volumenänderung:

$$\begin{aligned} \Delta V &= (d - \Delta d)^2 \cdot (l + \Delta l) - ld^2 \\ &= ld^2 - 2d\Delta d + l(\Delta d)^2 + \Delta ld^2 - 2d\Delta d\Delta l + \Delta l(\Delta d)^2 - ld^2 \\ &\approx \Delta ld^2 - 2ld\Delta d \end{aligned} \quad (7)$$

Es ergibt sich die relative Volumenänderung zu:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\mu) \\ &= \varepsilon(1 - 2\mu) \\ &= \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)\end{aligned}\quad (8)$$

Herleitung der oberen Grenze der Poissonschen Zahl μ

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l(\Delta d)^2}{ld^2} = \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\mu) \quad (9)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta d^2}{d} = 1 - 2\mu \quad (10)$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \frac{(\Delta d)^2}{2d^2} \quad (11)$$

Hieraus folgt, dass $\mu \leq 0,5$. Mit (8) und $\varepsilon > 0$ ergibt sich $\Delta V > 0$. Normalerweise liegt die Poissonsche Zahl μ zwischen 0,2 und 0,5. Allerdings kann sie auch bei einigen Substanzen, wie z.B.: Holz, Knochen, Schwamm etc. negativ sein, d.h. bei einer angelegten Spannung dehnt sich der Körper in einem bestimmten Bereich in alle drei Raumrichtungen aus.

Da Flüssigkeiten praktisch inkompressibel sind, ergibt sich als Poissonsche Zahl 0,5.

1.5 Der Schubmodul

Auf die Oberfläche eines Körpers wirkt die Scherspannung τ , wodurch die Seitenkanten des Körpers um den Winkel γ (in rad) geschert werden. Das Volumen des Körpers bleibt konstant. Man definiert eine weitere elastische Konstante, den Schubmodul, welcher bei der Torsion und Scherung von Festkörpern eine wichtige Rolle spielt:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_{\parallel}}{A\gamma} \quad (12)$$

Diese Definition gilt jedoch nur für sehr kleine Winkel $\gamma \leq 10^{-3}$. Dann kann γ auch durch $\tan \gamma = \frac{\Delta a}{a}$ ersetzt werden. Daraus folgt

$$G = \frac{F_{\parallel} a}{A\Delta a} \quad (13)$$

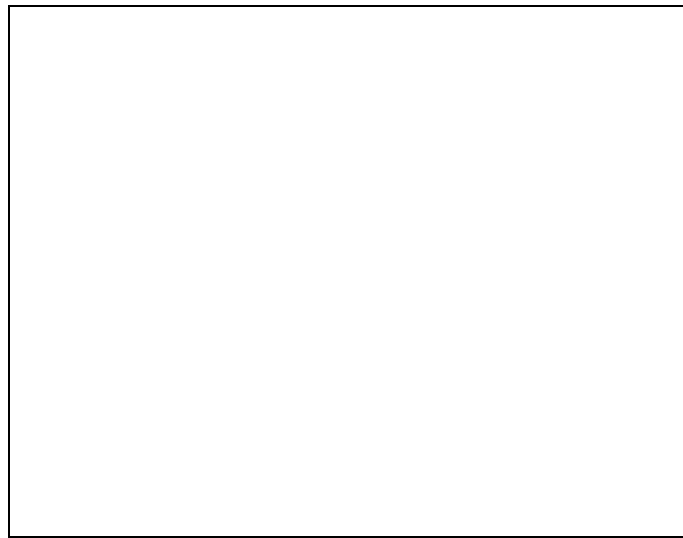


Abbildung 2: Scherung

1.6 Der Kompressionsmodul

Auf einen Quader mit dem Volumen V wirkt der allseitige Druck p und bewirkt die relative Volumenänderung $\frac{\Delta V}{V}$. Die sogenannte Kompressibilität κ ist definiert als:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (14)$$

Ihr Kehrwert K heißt Kompressionsmodul:

$$K = \frac{1}{\kappa} = -V \frac{dp}{dV} \quad (15)$$

1.7 Tensorcharakter der elastischen Konstanten

Wirken auf einen Festkörper mehrere Kräfte gleichzeitig in verschiedene Raumrichtungen, so kommt es zu einer Überlagerung von Dehnungen, Stauchungen, Scherungen, Kompressionen und Dilatationen.

Auf jede Oberfläche eines würfelförmigen Probekörpers wirken verschiedene Kräfte, die jeweils in ihre Komponenten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems zerlegt werden können. Auf jede Seite wirken somit zwei orthogonale Scherspannungen und eine Zugspannung. Der erste Index steht jeweils für die Kraftrichtung, während der zweite die Richtung der Flächennormalen angibt. Der Spannungszustand des Körpers kann durch den symmetrischen Spannungstensor σ beschrieben werden:

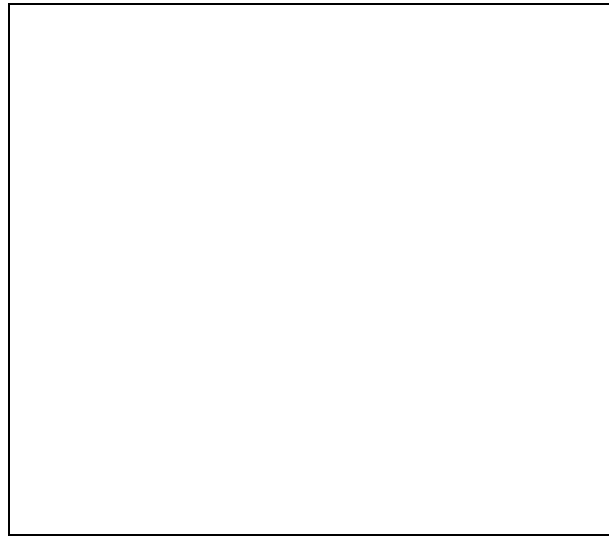


Abbildung 3: Definition des Spannungstensors

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Um die Verformung näher beschreiben zu können, betrachtet man die Längenänderungen ε_{ii} und die Scherwinkel γ_{ii} . Auf diesem Weg erhält man den Verzerrungstensor $\leftrightarrow \varepsilon$:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Die allgemeinste Form des Hookeschen Gesetzes kann also wie folgt mit Tensoren formuliert werden:

$$\hat{\sigma} = \hat{C} \cdot \hat{\varepsilon} \quad (18)$$

Die maximal 81 Elemente des Tensors \hat{C} heißen elastische Konstanten und können mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften je nach Aufbau des Kristalls und aufgrund der thermodynamischen Gegebenheiten auf 21 bis 3 unabhängige Konstanten reduziert werden.

1.8 Biegung eines einseitig eingespannten Balkens

Die von Bernoulli entwickelte Theorie geht davon aus, dass der Balken überall den gleichen Querschnitt besitzt. Man kann in Gedanken den Balken in eine

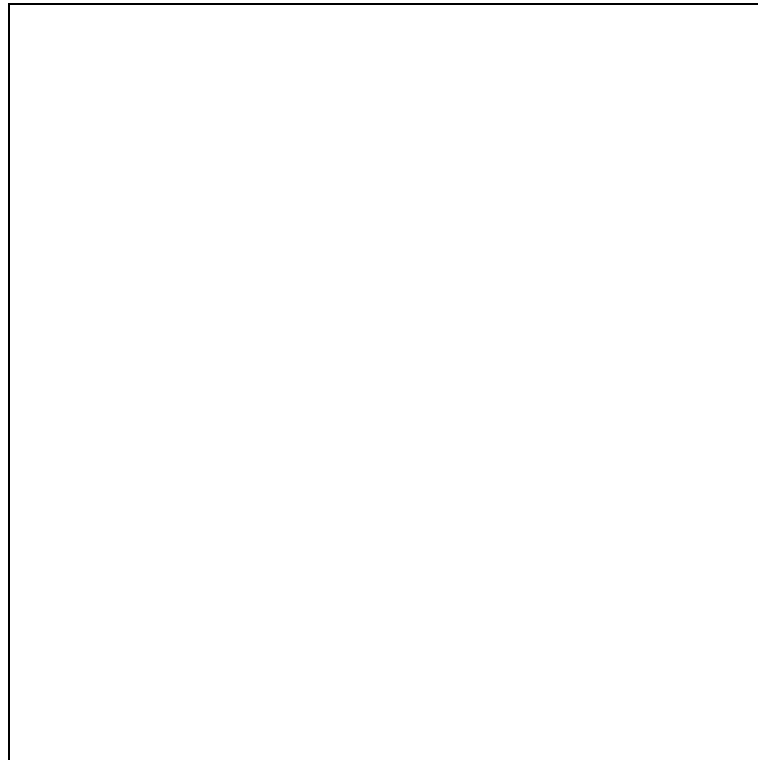


Abbildung 4: Biegung eines Balkens

Anzahl dünner horizontaler Schichten zerlegen, wobei eine Schicht bei der Biegung keine Längenänderung erfährt. Oberhalb dieser neutralen Schicht werden die Schichten gedehnt, darunter gestaucht. Die relative Längenänderung einer im Abstand y von der neutralen Faser befindlichen Schicht beträgt

$$\frac{(R + y)d\phi - Rd\phi}{dx} = y \frac{d\phi}{dx} = \frac{y}{R} \quad (19)$$

Die Kraft, die an einem Querschnittelement $dz dy$ angreift, ist nach der Definition des Elastizitätsmoduls gegeben durch

$$dF = \frac{E\gamma}{R} dz dy \quad (20)$$

$$F = \frac{E}{R} \iint y dz dy \quad (21)$$

Dies bedeutet, dass die neutrale Faser immer durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht, für den

$$\iint y dz dy = 0. \quad (22)$$

gilt. Diese Bedingung ist für die spätere Rechnung unabdingbar. Das Drehmoment der elastischen Kräfte, welches den Querschnitt um eine Parallele zur z-Achse zu drehen versucht, ergibt sich zu

$$|M| = \int y \, dF = \frac{E}{R} \int \int y^2 \, dz \, dy = \frac{E}{R} I. \quad (23)$$

Dabei ist I das Flächenträgheitsmoment:

$$I = \int \int y^2 \, dz \, dy \quad (24)$$

Mit den Integrationsgrenzen $z = 0$ bis $z = b$ und $y = -b/2$ bis $y = b/2$ folgt

$$I = \frac{1}{12} b d^3 \quad (25)$$

Das Drehmoment, welches durch die Masse m verursacht wird, beträgt

$$|M^*| = mg(L - x) \quad (26)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung für die Drehmomente folgt damit

$$\frac{EI}{R} = mg(L - x). \quad (27)$$

Für die Krümmung gilt

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} \quad (28)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{mg}{EI} (L - x) \quad (29)$$

Da für $x = 0$ sowohl y als auch dx/dy verschwinden, müssen bei der zweimaligen Integration keine Integrationskonstanten berücksichtigt werden.

$$y(x) = -\frac{mg}{EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (30)$$

Für das Elastizitätsmodul am freien Ende gilt:

$$E = -\frac{4L^3 mg}{b d^3 h} \quad (31)$$

1.9 Die Frequenz der Biegeschwingung

Siehe [2]. Für die Herleitung der Auswerteformel des dynamischen Versuchs betrachten wir eine kleine Massescheibe im Abstand \tilde{x} der Dicke $d\tilde{x}$. Die Masse $dm = \rho A d\tilde{x}$ der Scheibe wird bei der Schwingung durch eine Kraft

$dF = dm\ddot{z}(\tilde{x})$ beschleunigt. Diese Kraft erzeugt an der betrachteten Stelle x ein äußeres Drehmoment

$$dM_a = dF(\tilde{x} - x) = dm\ddot{z}(\tilde{x})(\tilde{x} - x). \quad (32)$$

Aufintegriert über alle Massescheibchen von x bis L ergibt sich

$$\begin{aligned} M_a &= \varrho A \int_x^L \ddot{z}(\tilde{x})(\tilde{x} - x) d\tilde{x} \\ &= \varrho A \int_x^L \ddot{z}(\tilde{x})\tilde{x} d\tilde{x} - \int_x^L \ddot{z}(\tilde{x})x d\tilde{x} \end{aligned} \quad (33)$$

Um nach der Beschleunigung auflösen zu können, differenziert man nach x :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_a}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \varrho A \left(-x\ddot{z}(x) + \int_L^x \ddot{z}(\tilde{x})d\tilde{x} + x\ddot{z}(x) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \int_L^x \ddot{z}(\tilde{x})d\tilde{x} \\ &= \varrho A \ddot{z}(x) \end{aligned} \quad (34)$$

Für das innere Drehmoment gilt

$$M_i = -\frac{Ed^3b}{12} z''(x) = -\frac{Ed^2A}{12} z''(x) \quad (35)$$

Differenziert man M_i zweimal nach x ,

$$\frac{d^2 M_i}{dx^2} = -\frac{Ed^2A}{12} z''(x) \quad (36)$$

so lassen sich diese zweiten Ableitungen der Drehmomente (34) und (36) gleichsetzen. Es folgt

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{Ed^2}{12\varrho} \frac{d^4 z}{dx^4} \quad (37)$$

Diese Differentialgleichung lässt sich mit den entsprechenden Anfangswerte lösen. Es ergibt sich

$$z(x, t) = \hat{z}_n(x) \sin(2\pi\nu_n t + \alpha_n) \quad (38)$$

Die gesuchte Grundfrequenz ($n = 1$) ist damit

$$\nu_1 = \frac{1,875^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{Ed^2}{12\varrho}} \quad (39)$$

Aufgelöst nach E ergibt sich unsere Auswerteformel

$$E = \left(\frac{2\pi L^2}{T_1 \cdot 1,875^2} \right) \cdot \frac{12\varrho}{d^2} \quad (40)$$

2 Experiment

2.1 Statisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

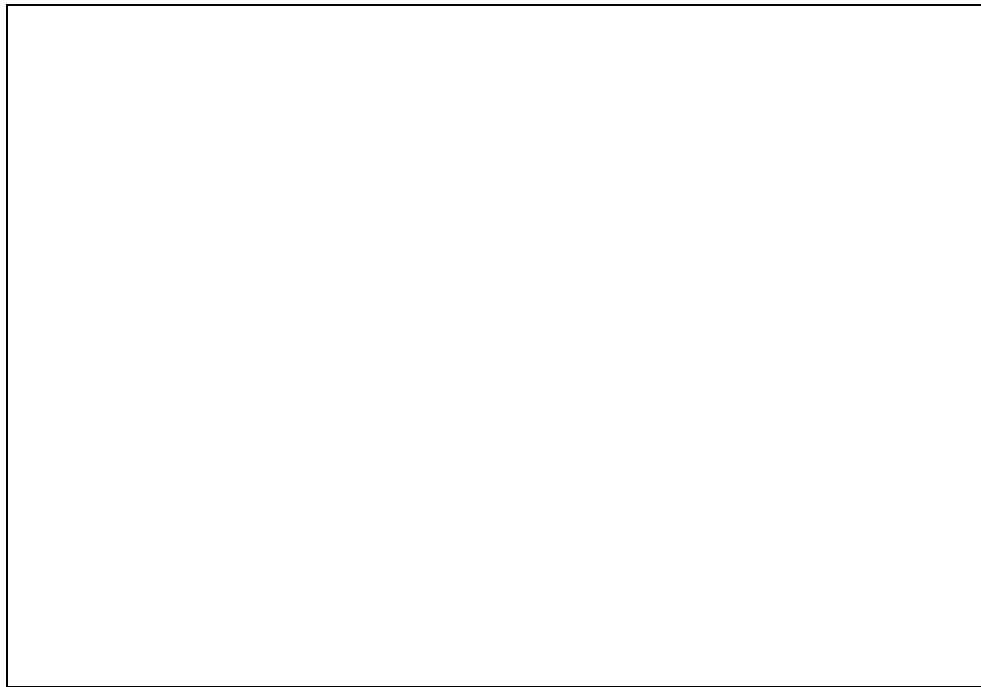


Abbildung 5: Versuchsaufbau

Zuerst misst man die Länge l_0 eines Metallstreifens mit dem Messstab, die Breite b mit der Schublehre und die Dicke d mit der Mikrometerschraube. Für den Versuch spannt man dann den Metallstreifen einseitig in eine Spannvorrichtung ein. Mit Hilfe einer Gewichtsschale, welche mit verschiedenen Gewichtsstücken beschwert werden kann, wird über eine Umlenkrolle eine Kraft auf den Metallstreifen übertragen. Bei ansteigender Belastung der Gewichtsschale mit Massestückchen, welche zuvor gewogen wurden, wird die Auslenkung h (Biegepeil) des Metallstreifens abgetragen und danach gemessen. Dies wiederholt man mit vier verschiedenen Einspannungen des Metallstreifens. Zu beachten ist, dass bei jeder Einspannung die zugehörige Länge des Streifens neu vermessen wird. Zur Bestimmung des E-Moduls benutzt man die Formel (31), wobei l die Länge des Balkens ab der Einspannung, d die Dicke, b die Breite, h die Auslenkung und F die Gewichtskraft der Gewichtsschale mit den jeweiligen Gewichtsstücken ist. Für eine Auslenkung $h \leq 0,2l$ befindet man sich im Proportionalitätsbereich des Metallstreifens.

Versuchsauswertung Aus dem Datenblatt A ersieht man die Daten der Massenstücke, sowie der untersuchten Metallstreifen. Für den silbrigen Streifen ergibt nach der Gleichung (31) ein Elastizitätsmodul von $E = 162,7\text{GPa} \pm 5,1\text{GPa}$ (siehe dazu Datenblatt B). Der Literaturwert von Stahl beträgt 210GPa , derjenige für Aluminium 71GPa . Stehen nur diese beiden zur Auswahl, so wird es sich wohl um Stahl gehandelt haben. Ebenso folgt für das E-Modul des rötlichen Streifens $E = 90,8\text{GPa} \pm 1,6\text{GPa}$. Der Literaturwert für Kupfer beträgt 123GPa .

Fehlerdiskussion Eine recht große Ungenauigkeit liefert die Mittelung der Massestückchen bei der statischen Methode. Um das Verfahren zu optimieren, hätte man die Massestücke jeweils mit ihren Gewicht kennzeichnen müssen, um eine genauere Auswertung zu erreichen. Eine weitere mögliche Fehlerquellen ist, die Gewichtskraft, die nicht genau senkrecht auf den Metallstreifen drückt. Die Biegung wird deshalb nur durch eine kleinere Kraftkomponente erzeugt.

Zu beachten ist außerdem, dass die Abmessungen des Metallstreifens recht stark über die Probe hinweg schwanken. Da bei der Berechnung des Elastizitätsmoduls bei beiden Messmethoden alle Größen mitunter sogar in der dritten Potenz in die Gleichung eingehen, ist es erstrebenswert eine möglichst ideale Probe bei der Messung zu verwenden.

Aufgrund hohen Alters und Verformungen der Metalle, welche schon beim Versuchsbeginn bestanden, ergeben sich erhebliche Fehler. Außerdem ist es möglich, dass es sich nicht um ein Reinmetall handelt, sondern dass sich kleine Verunreinigungen eingeschlichen haben, welche die Eigenschaften der Metalle verändern. Außerdem sind deren Eigenschaften durch Oxidation der Oberflächen mit Sicherheit nicht mehr so wie im Reinmetall.

Die Überprüfung der Auslenkungen mit der Näherungsformel ergeben sowohl für Stahl als auch für Kupfer recht schöne Diagramme (siehe Datenblatt D und E).

Wie aus dem Diagramm G für eine Einspannlänge ($23,2\text{cm}$ bei Stahl und $26,6\text{cm}$ bei Kupfer) exemplarisch gezeigt, ist der Quotient h_1/g in sehr guter Näherung konstant, so dass hier keine signifikanten Fehler zu erkennen sind.

Statische Methode:

Daten des silbrigen Streifens:			
Masse:	30,3g ± 0,1g		
Breite:	Messung	Wert [cm]	Fehler [cm]
	1	2,59	± 0,01
	2	2,58	± 0,01
	3	2,59	± 0,01
	4	2,60	± 0,01
	5	2,59	± 0,01
Mittelwert:		2,59	± 0,01
Dicke:	1	0,050	± 0,001
	2	0,050	± 0,001
	3	0,049	± 0,001
	4	0,050	± 0,001
	5	0,049	± 0,001
	Mittelwert:		0,050
Länge:	1	27,4	± 0,1

Daten des rötlichen Streifens:			
Masse:	27,3g ± 0,1g		
Breite:	Messung	Wert [cm]	Fehler [cm]
	1	2,01	± 0,01
	2	2,01	± 0,01
	3	2,01	± 0,01
	4	2,01	± 0,01
	5	2,01	± 0,01
Mittelwert:		2,01	± 0,01
Dicke:	1	0,050	± 0,001
	2	0,050	± 0,001
	3	0,050	± 0,001
	4	0,050	± 0,001
	5	0,050	± 0,001
	Mittelwert:		0,050
Länge:	1	31,0	± 0,1

Sonstige Daten:							
Gewicht der Massenplättchen:			Gewicht der Plastikschaale:				
	Messung	Wert [g]	Fehler [g]		Messung	Wert [g]	Fehler [g]
	1	1,08	± 0,01		1	4,05	± 0,01
	2	1,08	± 0,01				
	3	1,10	± 0,01				
	4	1,08	± 0,01				
	5	1,07	± 0,01				
	6	1,09	± 0,01				
	7	1,07	± 0,01				
	8	1,09	± 0,01				
	9	1,10	± 0,01				
	10	1,08	± 0,01				
	Mittelwert:	1,08	± 0,01				

silbriger Streifen:

Messgenauigkeiten [mm]: ± 1

Einspannlänge [cm]		23,2			23,7		24,8		24,9	
	m [g]	F [mN]	h_1 [mm]	E [GPa]	h_2 [mm]	E [GPa]	h_3 [mm]	E [GPa]	h_4 [mm]	E [GPa]
Gewichtsschale	4,050	39,731	4,5	139,5	4,0	167,3	4,0	191,7	5,0	155,3
Gewicht 1	5,134	50,365	5,5	144,7	5,0	169,7	5,5	176,8	6,0	164,0
Gewicht 2	6,218	60,999	6,5	148,3	6,0	171,3	7,0	168,2	7,5	158,9
Gewicht 3	7,302	71,633	7,5	150,9	7,5	160,9	8,0	172,9	8,5	164,7
Gewicht 4	8,386	82,267	8,5	153,0	8,5	163,1	9,0	176,5	10,0	160,7
Gewicht 5	9,470	92,901	9,5	154,6	9,5	164,8	10,0	179,3	11,5	157,8
Gewicht 6	10,554	103,535	10,5	155,8	11,0	158,6	11,5	173,8	13,0	155,6
Gewicht 7	11,638	114,169	11,5	156,9	12,0	160,3	12,5	176,3	14,5	153,8
Gewicht 8	12,722	124,803	12,5	157,8	13,0	161,7	13,5	178,5	15,5	157,3
Gewicht 9	13,806	135,437	13,5	158,6	14,5	157,4	15,0	174,3	17,0	155,7
Gewicht 10	14,890	146,071	14,5	159,2	15,5	158,8	16,0	176,2	18,0	158,6
Mittelwerte				152,7		163,1		176,8		158,4
Standardabw.				6,27		4,67		5,81		3,52

Gesamtmittelwert des E-Moduls:

162,7 GPa

Mittelwert der Standardabweichung:

5,1

rötlicher Streifen:

Messgenauigkeiten [mm]: ± 1

Einspannlänge [cm]			26,6		27,6		27,8		28,3	
	m [g]	F [mN]	h_1 [mm]	E [GPa]	h_2 [mm]	E [GPa]	h_3 [mm]	E [GPa]	h_4 [mm]	E [GPa]
Gewichtsschale	4,050	39,731	13,5	88,2	15,5	85,8	14,5	93,7	15,5	92,5
Gewicht 1	5,134	50,365	17,0	88,8	19,5	86,5	18,5	93,1	19,5	93,2
Gewicht 2	6,218	60,999	20,0	91,4	23,5	86,9	23,5	88,8	24,0	91,7
Gewicht 3	7,302	71,633	24,0	89,4	27,0	88,8	26,5	92,5	28,5	90,7
Gewicht 4	8,386	82,267	28,5	86,5	31,0	88,8	30,5	92,3	33,5	88,6
Gewicht 5	9,470	92,901	31,0	89,8	35,0	88,8	34,5	92,1	36,5	91,8
Gewicht 6	10,554	103,535	34,5	89,9	38,5	90,0	38,0	93,2	41,0	91,1
Gewicht 7	11,638	114,169	38,0	90,0	42,5	89,9	41,5	94,1	45,0	91,5
Gewicht 8	12,722	124,803	41,5	90,1	46,0	90,8	45,5	93,8	49,0	91,9
Gewicht 9	13,806	135,437	45,0	90,2	49,5	91,6	49,0	94,5	53,0	92,2
Gewicht 10	14,890	146,071	48,0	91,2	53,0	92,3	53,0	94,3	57,0	92,5
Mittelwerte				89,6		89,1		92,9		91,6
Standardabw.				1,38		2,09		1,61		1,21

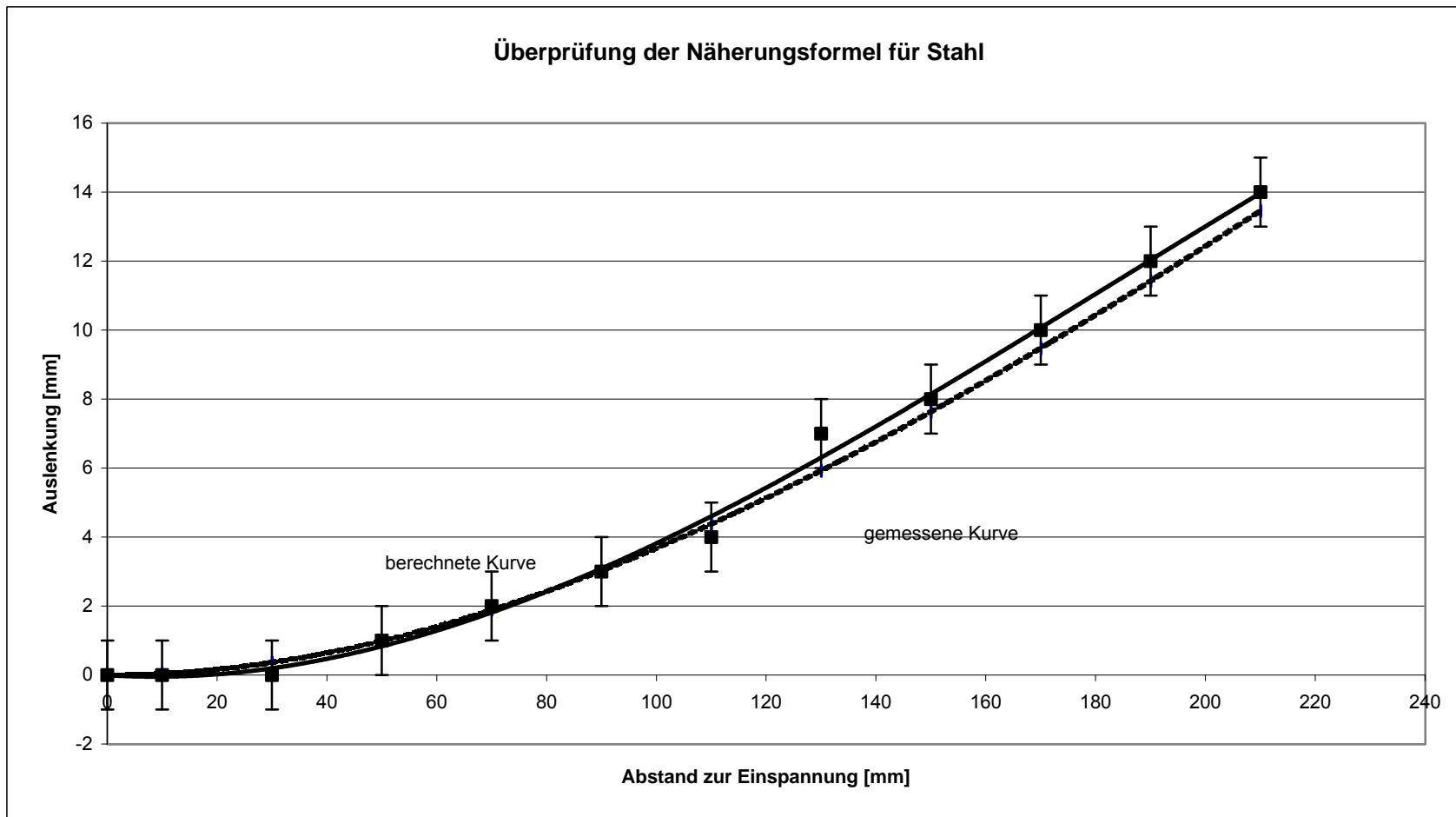
Gesamtmittelwert des E-Moduls:

90,8 GPa

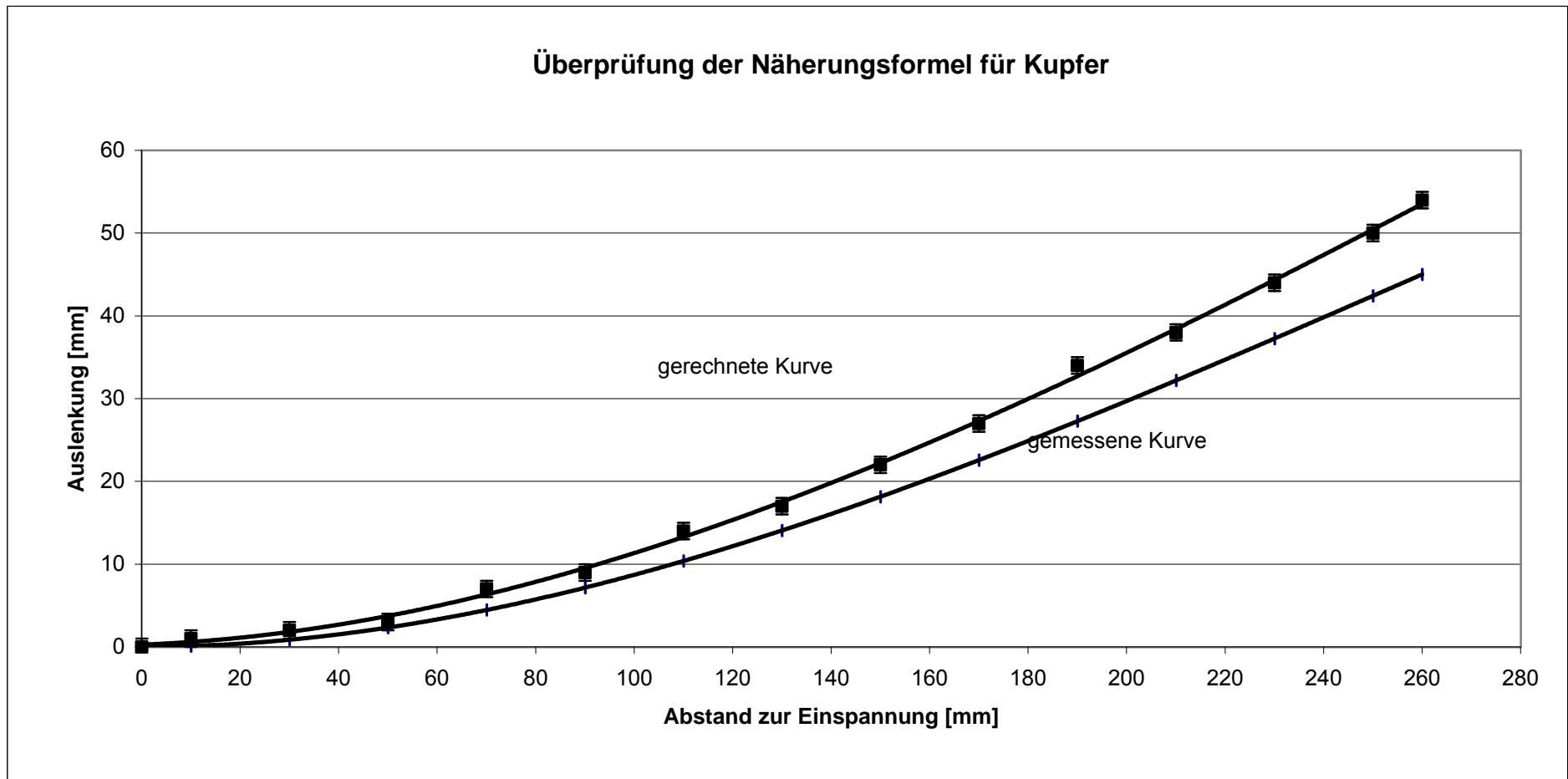
Mittelwert der Standardabweichung:

1,6 GPa

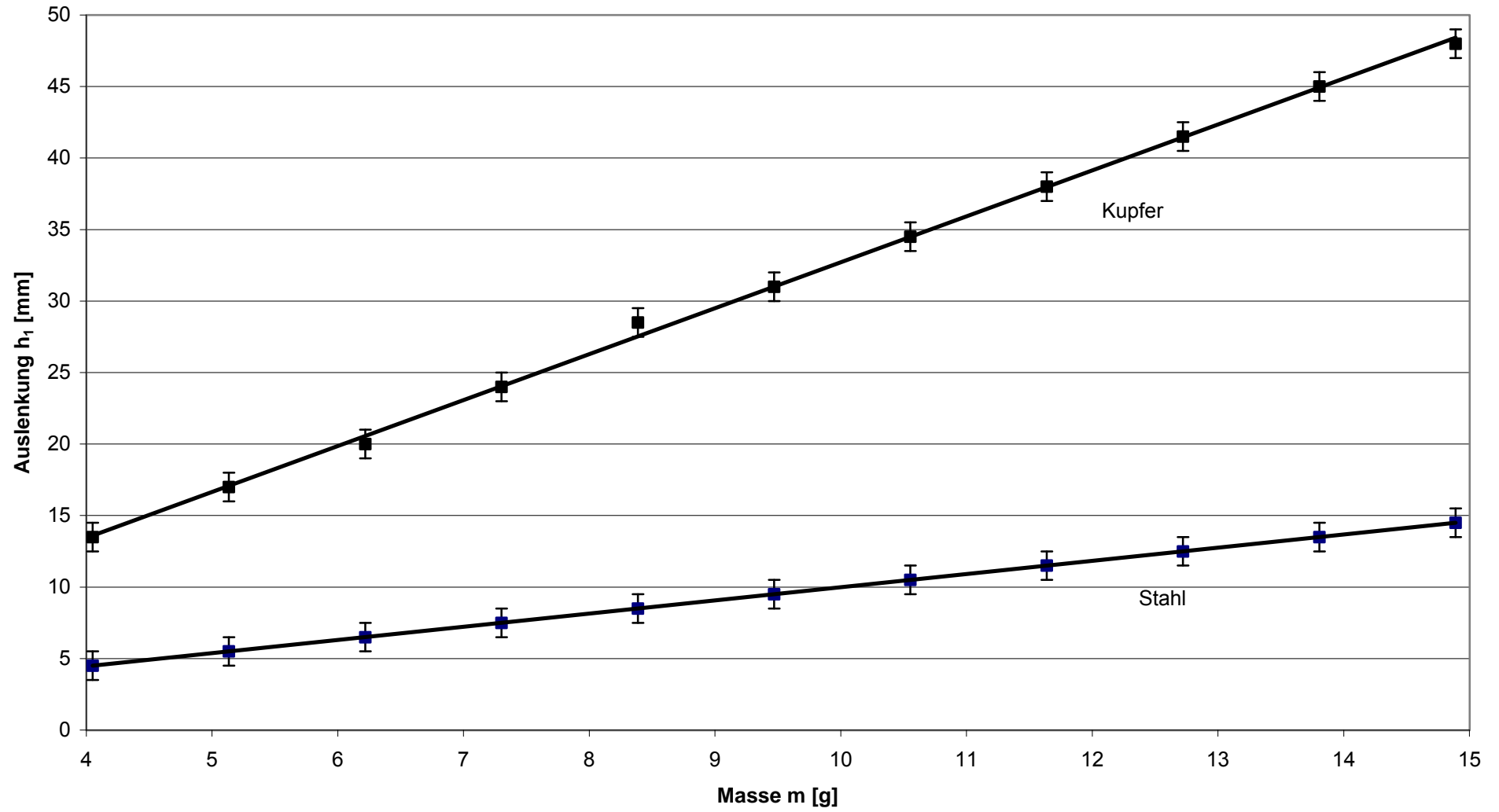
Einspannlänge	249 mm											
x-Wert	0	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210
y-Wert ber.	0	0,04	0,37	0,99	1,88	3,02	4,38	5,92	7,63	9,47	11,42	13,45
y-Wert gem.	0	0	0	1	2	3	4	7	8	10	12	14



Einspannlänge	260 mm															
x-Wert	0	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	260	
y-Wert ber.	0	0,10	0,86	2,34	4,45	7,16	10,38	14,06	18,15	22,57	27,27	32,18	37,25	42,41	45,01	
y-Wert gem.	0	1	2	3	7	9	14	17	22	27	34	38	44	50	54	



Gewichts-Auslenkungs-Diagramm



2.2 Dynamisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

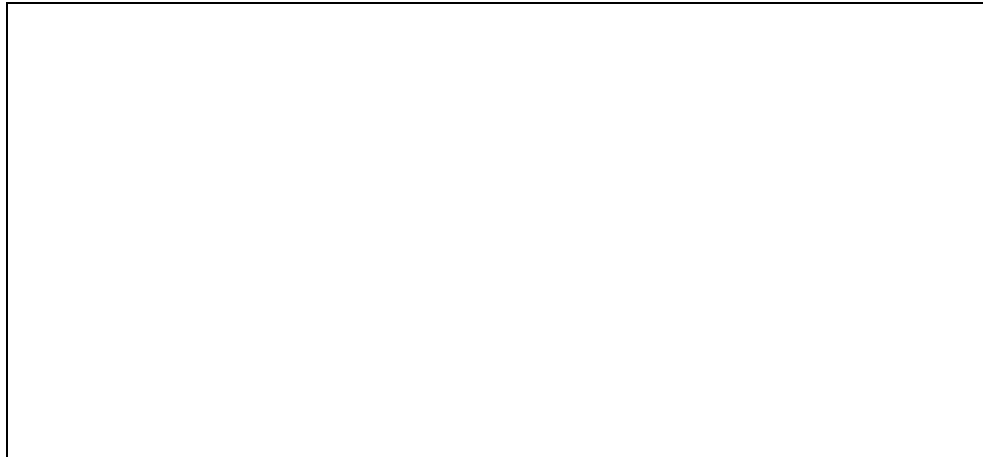


Abbildung 6: Versuchsaufbau

Die selben Metallstreifen wie in Versuch 2.1 werden wiederum einseitig eingespannt und durch Auslenkung in harmonische Schwingung versetzt. Durch diese Schwingung wird der Lichteinfall auf eine Photodiode periodisch unterbrochen. Mit einem an die Photodiode gekoppelten Messgerät kann die Periodendauer der Schwingung bestimmt werden. Diese Schwingung gehorcht der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\rho b d} \frac{\partial^4 \mu}{\partial x^4} \quad (41)$$

Das E-Modul lässt sich aus der Periodendauer T berechnen:

$$E = \left(\frac{2\pi l^2}{1,875^2 T} \right)^2 \frac{\rho b d}{I} \quad (42)$$

Die Messungen werden mit verschiedenen Einspannungen durchgeführt.

Versuchsauswertung Im Datenblatt H sind die Daten des dynamischen Versuchs für Stahl aufgetragen. Aus der Gleichung (40) errechnet sich der E-Modul zu $E_{\text{Stahl}} = 183,58 \text{ GPa} \pm 0,32 \text{ GPa}$.

Die Daten des dynamischen Versuchs für Kupfer findet man im Datenblatt I. Hier ergibt sich für den E-Modul $E_{\text{Kupfer}} = 107,56 \text{ GPa} \pm 0,33 \text{ GPa}$.

Fehlerdiskussion Die Metallstreifen sind einer starken Dämpfung unterworfen. Daher sind die Schwingungsdauern nicht konstant, teilweise treten erhebliche Unterschiede auf. Diese stark abweichenden Werte wurden allerdings gar nicht erst ins Meßprotokoll übernommen.

Dynamische Methode:

silbriger Streifen:

Einspannlänge [cm]: 24,5
 Trägheitsmoment [m²kg]: 2,63E-17
 Dichte (Literatur) [kg/m³]: 9627,09

1. Messreihe:			
Messung	Periodendauer [μs]	Fehler [μs]	E[GPa]
1	174743	±1	176,98
2	175154	±1	176,15
3	175122	±1	176,22
4	175318	±1	175,82
5	175314	±1	175,83
6	175258	±1	175,94
7	175358	±1	175,74
8	175288	±1	175,88
9	175388	±1	175,68
10	175208	±1	176,05
11	175398	±1	175,66
12	175135	±1	176,19
13	175298	±1	175,86
14	175378	±1	175,70
15	174988	±1	176,49
Mittelwert:	175223	±1	176,02

Standardabw. des E-Moduls: 0,36

Einspannlänge [cm]: 24,8
 Trägheitsmoment [m²kg]: 2,63E-17
 Dichte (Literatur) [kg/m³]: 9510,63

2. Messreihe:			
Messung	Periodendauer [μs]	Fehler [μs]	E[GPa]
1	167818	±1	191,89
2	168074	±1	191,31
3	168243	±1	190,92
4	168288	±1	190,82
5	168294	±1	190,81
6	168305	±1	190,78
7	168234	±1	190,94
8	168208	±1	191,00
9	168028	±1	191,41
10	168134	±1	191,17
11	168138	±1	191,16
12	168166	±1	191,10
13	168125	±1	191,19
14	168036	±1	191,39
15	168078	±1	191,30
Mittelwert:	168145	±1	191,15

Standardabw. des E-Moduls: 0,29

Mittelwert aus beiden Messungen:	183,58	0,32
----------------------------------	--------	------

Dynamische Methode:

rötlicher Streifen:

Einspannlänge [cm]: 27,6
 Trägheitsmoment [m²kg]: 2,09E-17
 Dichte (Literatur) [kg/m³]: 9842,09

1. Messreihe:			
Messung	Periodendauer [μs]	Fehler [μs]	E[GPa]
1	285086	±1	107,74
2	285545	±1	107,39
3	284973	±1	107,82
4	284746	±1	108,00
5	284849	±1	107,92
6	284798	±1	107,96
7	284558	±1	108,14
8	284456	±1	108,22
9	284458	±1	108,21
10	284458	±1	108,21
11	284448	±1	108,22
12	284336	±1	108,31
13	284338	±1	108,31
14	284138	±1	108,46
15	283878	±1	108,66
Mittelwert:	284604	±1	108,10

Standardabw. des E-Moduls:
0,31

2. Messreihe:			
Messung	Periodendauer [μs]	Fehler [μs]	E[GPa]
1	286585	±1	106,61
2	285808	±1	107,19
3	285696	±1	107,28
4	285978	±1	107,07
5	285768	±1	107,22
6	285798	±1	107,20
7	286268	±1	106,85
8	286988	±1	106,31
9	285228	±1	107,63
10	285696	±1	107,28
11	286318	±1	106,81
12	286047	±1	107,02
13	285746	±1	107,24
14	286628	±1	106,58
Mittelwert:	286039	±1	107,02

Einspannlänge [cm]: 27,6
 Trägheitsmoment [m²kg]: 2,09E-17
 Dichte (Literatur) [kg/m³]: 9842,09

Standardabw. des E-Moduls:
0,35

Mittelwert aus beiden Messungen:	107,56	0,33
----------------------------------	--------	------

2.3 Vergleich von statischer und dynamischer Methode

Die Messergebnisse der dynamischen Methode liegen näher am Literaturwert als die der statischen Methode. Außerdem sind ihre Fehler um eine Potenz kleiner. Daher ist die dynamische Methode der statischen vorzuziehen.

Literatur

- [1] A. Birnesser / S. Wagner (2000): Grundpraktikum der Physik; Versuch Nr. 7: Elastizitätskonstante von kristallinen Festkörpern; Ulm, Universität Ulm
- [2] G. Prinz / F. Sperka (1998): Grundpraktikum der Physik; Versuch Nr. 7: E-Modul; Ulm, Universität Ulm
- [3] W. Walcher (1994): Praktikum der Physik; 7., überarbeitete und ergänzte Auflage; Stuttgart: Teubner
- [4] Horst Kuchling (1999): Taschenbuch der Physik; 16. Auflage [Sonderausg.]; München / Wien: Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag;
- [5] Bergmann / Schaefer (1998): Lehrbuch der Experimentalphysik; Bd.1: Mechanik, Relativität, Wärme; 11., völlig neubearbeitete Auflage; Berlin / New York: de Gruyter