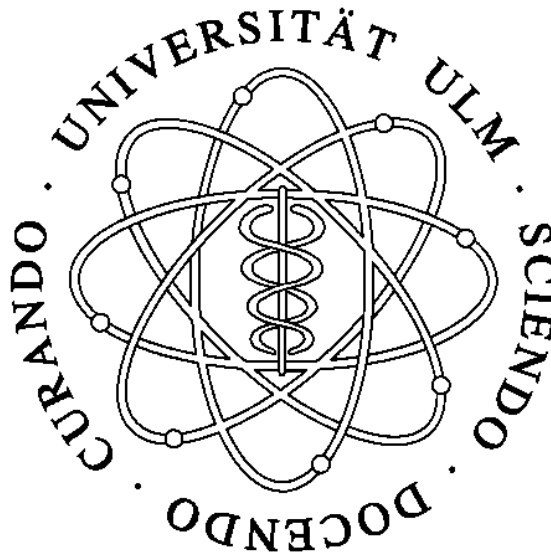


# Grundpraktikum der Physik 2002



Versuch 4:

Drillachse

Korrigierte Version

Sebastian Schnur  
sebastianx@web.de

Michael Diez  
m@dcomp.de

Oktober 2002

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1. THEORETISCHE GRUNDLAGEN.....</b>	<b>4</b>
1.1 DER STARRE KÖRPER .....	4
1.2 BEWEGUNG STARRER KÖRPER.....	4
1.2.1 Drehbewegung.....	4
1.3 TRÄGHEITSMOMENT UND ROTATIONSENERGIE, SATZ VON STEINER .....	5
1.4 DREHMOMENT, TRÄGHEITSTENSOR UND DREHIMPULS .....	6
1.4.1 Trägheitsmoment einer runden Scheibe .....	7
1.4.2 Trägheitsmoment einer Kugel .....	7
1.4.3 Trägheitsmoment eines Zylinders.....	7
1.4.4 Trägheitsmoment eines Stabes .....	7
1.5 TRÄGHEITSELLIPSOID .....	8
1.6 DREHPENDEL UND DREHSCHWINGUNG.....	9
1.7 DER KREISEL.....	9
1.7.1 Die Nutation .....	9
1.7.2 Die Präzession .....	10
<b>2. VERSUCHSBESCHREIBUNG.....</b>	<b>11</b>
2.1 BESTIMMUNG DER WINKELRICHTGRÖßE .....	11
2.1.1 Statische Methode .....	11
2.1.2 Dynamische Methode.....	11
2.2 TRÄGHEITSMOMENTE.....	12
2.2.1 Der Satz von Steiner.....	12
2.2.2 Trägheitsmoment einer Vollkugel.....	12
2.2.3 Kreiselpräzession .....	12
<b>3. VERSUCHSAUSWERTUNG .....</b>	<b>13</b>
3.1 BESTIMMUNG DER WINKELRICHTGRÖßE .....	13
3.1.1 Statische Methode .....	13
3.1.2 Dynamische Methode.....	14
3.2 BESTIMMUNG DER HAUPTTRÄGHEITSMOMENTE.....	17
3.2.1 Vollkugel.....	17
3.2.2 Kreisscheibe .....	17
3.2.3 Verifizierung des Satzes von Steiner.....	17
3.3 KREISELPRÄZESSION.....	18
<b>4. FEHLERDISKUSSION .....</b>	<b>19</b>
4.1 BESTIMMUNG DER FEDERKONSTANTEN .....	19

4.1.1 Statische Methode .....	19
4.1.2 Dynamische Methode.....	19
4.2 TRÄGHEITSMOMENT VON HOLZKUGEL UND SCHEIBE.....	19
4.3 KREISELPRÄZSSION .....	19
<b>5. LITERATURVERZEICHNIS .....</b>	<b>20</b>

# 1. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

## 1.1 Der starre Körper

In der Physik werden Körper oftmals durch Massenpunkte angenähert (idealisiert). Da diese Massenpunkte keine Ausdehnung haben, dienen sie nur bedingt zur exakten Beschreibung der Physik. Man greift deshalb auf ein ebenfalls idealisiertes Modell des starren Körpers zurück. Per Definitionem ist ein starrer Körper dadurch gekennzeichnet, dass der Abstand zweier beliebiger Massenpunkte  $i$  und  $j$  konstant ist. Diese Annahme entspricht natürlich nicht der Realität, da der Abstand zwischen zwei Massepunkten (Atomen) nie konstant ist, da z.B. immer Gitterschwingungen auftreten.

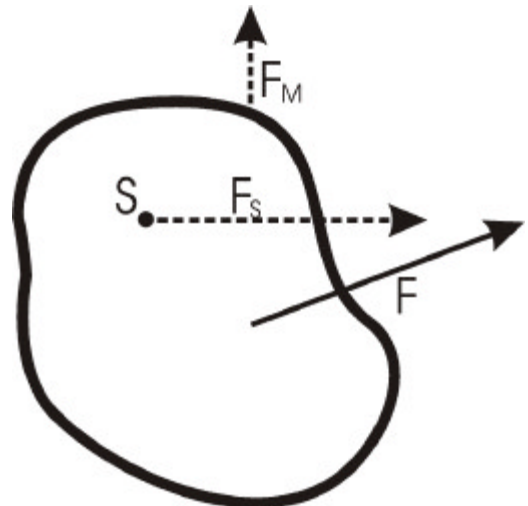
Bei den Mechanik Versuchen jedoch spielen diese mikroskopischen Änderungen keine Rolle, so dass wir im Folgenden von starren Körpern ausgehen dürfen.

## 1.2 Bewegung starrer Körper

Die Bewegung eines starren Körpers kann im Verhältnis relativ einfach beschrieben werden. Normalerweise benötigt man zur völligen Beschreibung einer Bewegung  $3N$  Koordinaten (für jedes der  $N$  Teilchen drei), um seine Position im Bezug auf ein raumfestes Koordinatensystem zu beschreiben. Beim starren Körper reduziert sich die Anzahl der zur Beschreibung notwendigen Koordinaten auf 6. (3 des Translation und 3 der Rotation).

Befindet sich der Ursprung des Koordinatensystems nicht im Schwerpunkt des Körpers, so benötigt man 3 Koordinaten, um den Schwerpunkt zu lokalisieren und weitere 3, um die Verdrehung des körpereigenen relativ zum ortsfesten Koordinatensystems zu beschreiben.

Eine Bewegung eines starren Körpers kommt dadurch zu Stande, dass eine äußere Kraft am Körper angreift. Diese Kraft lässt sich als Kombination einer linienflüchtigen Kraft, welche auf der Wirkungslinie auf Schwerpunktsniveau verschoben werden kann und einer Kraft begreifen, welche dem Körper ein Drehmoment verpasst und den Körper in Rotation versetzt (vergleiche nebenstehende Skizze).



### 1.2.1 Drehbewegung

Bei einer Drehbewegung bleibt aufgrund der Definition eines starren Körpers der Abstand aller Punkte von der Drehachse jeweils konstant. Das heißt, die Massepunkte bewegen sich auf konzentrischen Kreisen um die Rotationsachse. Drehbewegungen werden durch den *Drehwinkel*  $\varphi$  charakterisiert: Ein Punkt mit den Ortsvektor  $\vec{r}$ , der unter dem Winkel  $\alpha$  zur Drehachse steht, verschiebt sich bei Drehung um den (infinitesimalen) Winkel  $d\varphi$  um

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

Die zeitliche Änderung des Drehwinkels wird durch die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  beschrieben:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Die Tangential- und damit die Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  eines Punktes erhält man zu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Definiert man die Winkelbeschleunigung als zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit, d.h.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2},$$

so lassen sich (reine) Drehbewegungen völlig analog zu (reinen) translatorischen Bewegungen behandeln.

### 1.3 Trägheitsmoment und Rotationsenergie, Satz von Steiner

Anschaulich ist es klar, dass die Massenpunkte auf einer sich drehenden Kreisscheibe bei unterschiedlichem Abstand von der Rotationsachse auch eine unterschiedliche Geschwindigkeit haben und damit unterschiedliche Energie.

Mit der Überlegung lässt sich die Rotationsenergie eines Körpers als die Summe der Bewegungsenergien der einzelnen Massenpunkte bestimmen:

$$E_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{=J} = E_{rot} \quad (\text{falls } \omega \perp r)$$

Das hier nun definierte Trägheitsmoment ist eine, für den Körper charakteristische Größe.  $J = \sum_i m_i r_i^2$  spiegelt praktisch eine „Träge Masse der Rotation“ wieder.

Geht man nun zu einer kontinuierlichen Massenverteilung über, so muss die Summe durch das Integral ersetzt werden und es ergibt sich:

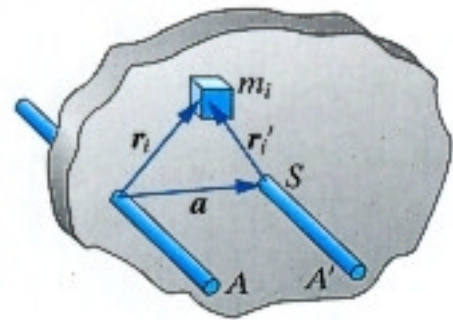
$$J = \int_V r^2 dm, \text{ bzw.}$$

$$J = \int_V r^2 \rho dV$$

Kennt man das Trägheitsmoment  $J$  zu einer Achse durch den Schwerpunkt ( $A'$ ), so lässt sich mit Hilfe des Steiner'schen Satzes das Trägheitsmoment zu einer beliebigen, dazu parallelen Achse  $A$  bestimmen.

Verlaufe diese in einem Abstand  $a$  zur Schwerpunktsträgheitsachse, so lautet das resultierende Trägheitsmoment:

$$J_A = J_{A'} + ma^2$$



Es gilt (vgl. nebenstehende Abbildung):

$$J_A = \sum m_i \vec{r}_i^2 = \sum m_i (\vec{r}_i' + \vec{a})^2 = \sum m_i \vec{r}_i'^2 + \sum m_i \vec{a}^2 + 2\vec{a} \sum m_i \vec{r}_i'$$

$$= J_{A'} + ma^2 + 2\vec{a} \sum m_i \vec{r}_i'$$

Da  $A'$  durch den Schwerpunkt geht, verschwindet der letzte Term.

## 1.4 Drehmoment, Trägheitstensor und Drehimpuls

Analog zum Impuls  $\vec{p}$  und zur Kraft  $\vec{F}$  bei Translationsbewegungen gibt es bei Rotationsbewegungen den Drehimpuls  $\vec{L}$  und das Drehmoment  $\vec{M}$  :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Analog zum zweiten Newtonschen Axiom ist der Drehimpulssatz formuliert:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Es gilt nämlich:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = m \left( \overbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}^{=0} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{M}$$

Ein Massepunkt  $i$  eines Körpers hat den Drehimpuls  $\vec{L}_i = m\vec{r}_i \times \vec{v}_i$ .

Für den ganzen Körper gilt daher:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)$$

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes lässt sich daraus das Trägheitsmoment, bzw. den Trägheitstensor herleiten. Dieser Tensor 2. Stufe beschreibt das Trägheitsverhalten des Körpers vollständig.

Es gilt:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i (\vec{\omega}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i (\vec{\omega}_i \cdot \vec{r}_i))$$

sei  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  und  $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\Rightarrow \vec{L}_i = m_i \cdot \begin{pmatrix} (y^2 + z^2)\mathbf{w}_x - xy\mathbf{w}_y - xz\mathbf{w}_z \\ -xy\mathbf{w}_x + (x^2 + z^2)\mathbf{w}_y - yz\mathbf{w}_z \\ -xz\mathbf{w}_x - yz\mathbf{w}_y + (x^2 + y^2)\mathbf{w}_z \end{pmatrix} = m_i \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}}_{\vec{J}_i} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_y \\ \mathbf{w}_z \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung entspricht den drei Komponentengleichungen

$$L_x = \Theta_{xx}\mathbf{w}_x + \Theta_{xy}\mathbf{w}_y + \Theta_{xz}\mathbf{w}_z$$

$$L_y = \Theta_{yx}\mathbf{w}_x + \Theta_{yy}\mathbf{w}_y + \Theta_{yz}\mathbf{w}_z$$

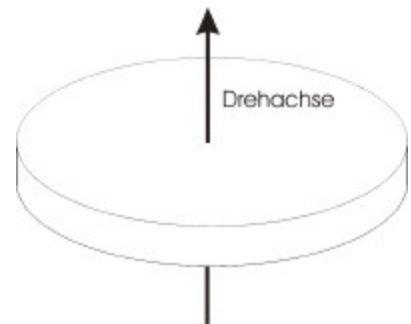
$$L_z = \Theta_{zx}\mathbf{w}_x + \Theta_{zy}\mathbf{w}_y + \Theta_{zz}\mathbf{w}_z$$

Die Hauptdiagonalelemente werden als Hauptträgheitsmomente bezeichnet. Die anderen Elemente nennt man Deviationsmomente. Dreht sich ein Körper z.B. um eine seiner drei Hauptachsen, so wirken keine Kräfte auf ein eventuelles Lager. Die Deviationsmomente tragen dazu bei, dass der Körper bei freier Rotation diese in Richtung seiner Hauptachsen ändert. Ein freier Körper rotiert

deshalb (nach gewisser Zeit) um die Hauptachse des größten, oder kleinsten Moments. Da der Trägheitstensor symmetrisch ist, lässt sich eine Hauptachsentransformation durchführen. Diese dazu notwendige unitäre Matrix ist hier allerdings orthogonal, d.h. das Hauptachsensystem kann durch eine Drehung des Koordinatensystems erreicht werden. In diesem Hauptachsensystem gibt es keine Deviationsmomente mehr. Dreht man jetzt um eine Hauptachse, so gilt nun, dass  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ . Nun kann der tensorielle Charakter des Trägheitsmoments ignoriert werden und das Trägheitsmoment als Skalar betrachtet werden (was wir in den Rechnungen auch tun werden).

### 1.4.1 Trägheitsmoment einer runden Scheibe bei Drehung um die vertikale Achse

$$\Theta = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi h r dr = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi h \cdot \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2$$



### 1.4.2 Trägheitsmoment einer Kugel

$$\Theta = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{2}{5} m R^2$$

### 1.4.3 Trägheitsmoment eines Zylinders um die vertikale Achse (vergleiche Scheibe)

$$\Theta = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 dV = 2\pi h r \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2$$

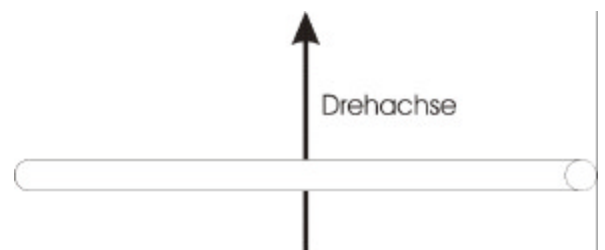
bzw. für einen Hohlzylinder der Wanddicke  $d$

$$\Theta = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 dV = 2\pi h r \int_{R-d}^R r^3 dr = \frac{1}{2} m (R^2 + (R-d)^2) = \frac{1}{2} m (R_a^2 + R_i^2)$$

### 1.4.4 Trägheitsmoment eines Stabes

Unter einem Stab versteht man einen Körper, dessen Radius viel kleiner ist als seine Länge (siehe Skizze)

$$\Theta = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 dV = r A \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dr = \frac{1}{12} m L^2$$



## 1.5 Trägheitsellipsoid

Für die beliebige Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt, so gilt für die Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \int (\vec{w} \times \vec{r})^2 dm$$

Formt man nun das Kreuzprodukt erneut nach  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{d})$  um, erhält man

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{w}^2 r^2 - (\vec{r} \cdot \vec{w})^2] \cdot dm = \frac{\mathbf{w}^2}{2} \int r^2 dm - \frac{1}{2} \int (\vec{w} \cdot \vec{r})^2 dm = \frac{\mathbf{w}_x^2 + \mathbf{w}_y^2 + \mathbf{w}_z^2}{2} \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$$- \frac{1}{2} \int [\mathbf{w}_x x + \mathbf{w}_y y + \mathbf{w}_z z]^2 dm = \frac{1}{2} [\mathbf{w}_x^2 \Theta_{xx} + \mathbf{w}_y^2 \Theta_{yy} + \mathbf{w}_z^2 \Theta_{zz}] + \mathbf{w}_x \mathbf{w}_y \Theta_{xy} + \mathbf{w}_x \mathbf{w}_z \Theta_{xz} + \mathbf{w}_y \mathbf{w}_z \Theta_{yz}$$

In kompakter Tensorschreibweise lautet diese Gleichung

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{w}^T \cdot \vec{\Theta} \cdot \vec{w}$$

Falls der Trägheitstensor auf Hauptachsen transformiert ist, gilt

$$E_{rot} = \frac{1}{2} (\Theta_a \mathbf{w}_x^2 + \Theta_b \mathbf{w}_y^2 + \Theta_c \mathbf{w}_z^2)$$

wobei  $\mathbf{w}_i$  die Komponenten des Vektors  $\mathbf{w}$  in die drei Raumrichtungen sind. Man betrachte nun die Flächen konstanter Rotationsenergie. Diese sind Ellipsoide. Die Halbachsen der Ellipsoide sind durch die Hauptträgheitsmomente bestimmt. Man nennt diese Ellipsoide Trägheitsellipsoide. Es gilt:

$$const = 2E_{rot} = \frac{\mathbf{w}_x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\Theta_a}}\right)^2} + \frac{\mathbf{w}_y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\Theta_b}}\right)^2} + \frac{\mathbf{w}_z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\Theta_c}}\right)^2}$$



## 1.6 Drehpendel und Drehschwingung

Ein Drehpendel besteht aus einem zur Achse drehbar gelagerten Körper. In unserem Fall eine Kreisscheibe. Eine, mit der Achse verbundene Spiralfeder sorgt für ein rückstellendes Moment, das direkt proportional zur Auslenkung  $\varphi$  aus der Ruhelage ist:

$$\vec{M} = -D\vec{\varphi}$$

Die Größe  $D$  heißt Richtmoment; ihr Wert hängt von der Stärke der Feder ab. Mit Hilfe des Drehmomentsatzes lässt sich die Drehbewegung eines starren Körpers um eine feste Achse beschreiben durch

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} = -D\mathbf{j}$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung der Schwingung zu:

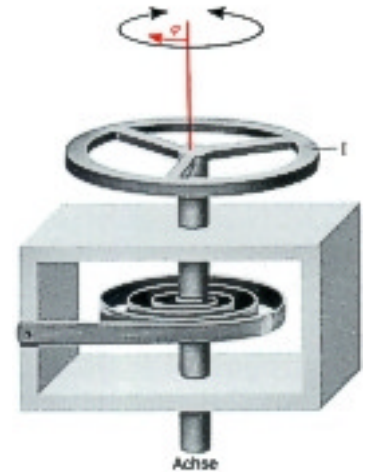
$$\mathbf{j}'' + \frac{D}{J}\mathbf{j} = 0$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Schwingungsgleichung  $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$  (ohne Dämpfung) erhält als Ausdruck für die Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

Daraus lässt sich nun die Periodendauer der harmonischen Schwingung des Drehpendels bestimmen, was wir auch im 2. Versuchsteil tun werden:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$$

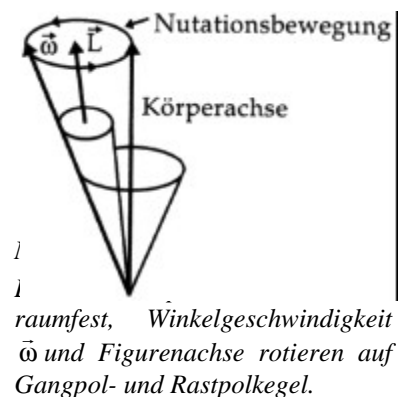


## 1.7 Der Kreisel

Als Kreisel bezeichnet man starre Körper, die nicht durch eine kräftefrei im Schwerpunkt gelagerte Achse in ihren Freiheitsgraden eingeschränkt sind. Wirkt kein äußeres Drehmoment auf sie, so bleibt der Drehimpuls konstant. Die Rotationsachse  $\vec{\omega}$  kann sich jedoch ändern und muss nicht zwangsweise parallel zu  $\vec{L}$  sein.

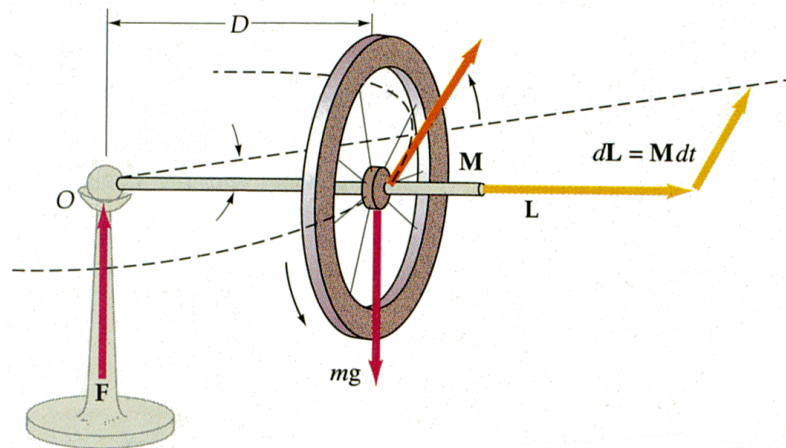
### 1.7.1 Die Nutation

Wird der Kreisel z.B. durch einen kleinen Stoß oder durch Unwuchten „gestört“, so führt er eine so genannte Nutationsbewegung aus. Die Nutationsbewegung tritt auch bei nichtsymmetrischen Kreiseln auf, wenn die Hauptachsenmomente nicht gleich groß sind und die Rotation nicht um eine Hauptachse erfolgt. Die Drehachse, d.h. der Vektor der Winkelgeschwindigkeit (=Drehachse) bildet einen festen Winkel mit dem Drehimpulsvektor, dessen Wert sich aus dem Trägheitstensor ergibt, und der um den Drehimpulsvektor rotiert ( $\Rightarrow$  Rastpolkegel). Ein Gangpolkegel bildet sich aus, wenn die Figurenachse einen festen Winkel mit der Drehachse bildet.



### 1.7.2 Die Präzession

Wirkt eine äußere Kraft auf den Kreisel ein, welche ein Drehmoment verursacht, so führt der Kreisel die so genannte Präzessionsbewegung aus. Die Präzession ist dafür verantwortlich, dass ein, nur an eine Seite seiner waagrechten Drehachse unterstützter Kreisel (siehe Bild unten) nicht in Folge der Erdanziehung nach unten fällt, sondern sich in der waagrechten Ebene gegen den Urzeigersinn dreht. Dies war bei den Versuchskreisel leider nur bedingt der Fall.



Die am Schwerpunkt angreifende Kraft ( $F=mg$ ) steht senkrecht zur Drehachse. Der Drehmomentvektor  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  steht somit senkrecht zur Kraft und zur Drehachse. Die dadurch bewirkte Änderung des Drehimpulsvektors  $d\vec{L} = \vec{M} dt$  steht folglich senkrecht zum Drehimpuls  $\vec{L}$ , wodurch es zu einer Rotation der Drehimpulsachse kommt. Der Drehwinkel  $d\varphi$  ergibt sich zu:

$$d\mathbf{j} = \frac{dL}{L} = \frac{mg \cdot a}{L} dt$$

Die Präzessionsgeschwindigkeit  $\omega_p$  beträgt also:

$$\omega_p = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{mga}{L} = \frac{mga}{J_K \omega_K}$$

Sie ist um so größer, je größer das angreifende Drehmoment ist und je kleiner das Trägheitsmoment des Kreisels und je kleiner seine Rotationsgeschwindigkeit ist.

## 2. VERSUCHSBESCHREIBUNG

### 2.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Winkelrichtgröße, oder Federkonstante wird mittels zwei Methoden bestimmt:

#### 2.1.1 Statische Methode

Bei der statischen Bestimmung der Federkonstanten werden verschiedene Gewichte über einen Faden tangential an einer Scheibe befestigt, welche an der Drillachse befestigt ist. Über das Anhängen von Gewichten wird auf die Drillachse ein Drehmoment ausgeübt, welches zu einem Winkelausschlag auf der Winkelskala führt. Dieser wird mittels eines Zeigers abgelesen. Hierbei wird angenommen, dass die Auslenkung, wie im Theorieteil behandelt, proportional zum Drehmoment ist, so dass die Gleichung  $M = mgr$  gilt, wobei  $m$  die angehängte Masse ist.

#### 2.1.2 Dynamische Methode

Bei der dynamischen Methode wird an der Drillachse eine Stange befestigt (waagrecht), auf der man die angebrachten Gewichte verschieben kann. Versetzt man das System nun in Drehschwingungen und misst man nun bei verschiedenen Abständen der Gewichte die Periodendauer, so lässt sich mit Hilfe der Gleichung

$$D = 4\pi^2 \frac{J}{T^2}$$

auf die Winkelrichtgröße der Spiralfeder zurückschließen.

Das Trägheitsmoment der Anordnung ist die Summe aus den Momenten der Stange, plus der beiden Zylinder, welche mit Hilfe des Steiner'schen Satzes bestimmt werden. Aufgrund eines abschätzbaren geringen Wertes der Trägheitsmomente der Halterungen, können diese vernachlässigt werden. Die Stange und die Massen ergeben Werte von:

Stange:  $J_s = \frac{1}{12} m(3r^2 + l^2)$

Massen:  $J_M = \frac{1}{4} m(r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} l^2) + ma^2$ , wobei  $a$  der Abstand der Massen von der Drehachse bedeutet. In unserem Fall wurde das zylindrische Gewicht am Stabende als Massepunkt mit dem Abstand  $a$  aufgefasst.

Anhand obiger Bestimmungsgleichung für die Winkelrichtgröße wird eine Proportionalität zwischen  $J$  und  $T^2$  sichtbar. Trägt man  $J$  über  $T^2$  auf, so ergibt sich als Steigung der Geraden:

$$m = \frac{D}{4\pi^2}$$

Bei der Auftragung wird sich wohl keine Ursprungsgerade einstellen, dass wir bei der Berechnung ja die Momente der Befestigungsschrauben vernachlässigt haben.

## 2.2 Trägheitsmomente

### 2.2.1 Der Satz von Steiner

Um den Satz von Steiner zu bestätigen spannt man eine Kreisscheibe an verschiedenen Punkten mit verschiedenen Abständen zum Schwerpunkt ein. Versetzt man nun das System in Schwingungen so ergeben sich in Abhängigkeit vom Schwerpunktsabstand verschiedene Schwingungszeiten. Für das Trägheitsmoment der Scheibe gilt nach Steiner:

$$J_s = \frac{1}{2}mr^2 + ma^2$$

Aus der Schwingungsdauer lässt sich das Trägheitsmoment bestimmen zu:

$$J_s = T^2 \frac{D}{4p^2}$$

### 2.2.2 Trägheitsmoment einer Vollkugel

Die Bestimmung der Trägheitsmomente verschiedener geometrischer Körper erfolgt mit der selben Versuchsanordnung wie oben beschrieben.

Die theoretisch berechneten Werte für eine Kreisscheibe (bei vernachlässigter Masse der Halterung) und einer massive Kugel betragen zum Vergleich:

Kugel:  $J_K = \frac{2}{5}mr^2$

Scheibe:  $J_S = \frac{1}{2}mr^2$

### 2.2.3 Kreiselpräzession

Um die Präzessionsfrequenz eines Kreisels zu bestimmen, wird folgender Versuchsaufbau verwendet. Am Ende eines waagrecht gelagerten Auslegers rotiert ein Kreisel mit hoher Frequenz. Am anderen Ende des Stabes sitzt ein verschiebbares Massenstück. Am Fuß des Kreisels sind 90 Schlitz eingefräst, an denen mittels einer Photodiode die Präzessionsgeschwindigkeit ermittelt werden kann.

Zuerst wird der Kreisel mit dem verschiebbaren Gewicht in die Gleichgewichtslage gebracht, so dass bei rotierender Scheibe keine Präzession wirkt. Dann wird das Gewicht schrittweise verschoben, und die entstehende Präzessionsfrequenz ermittelt.

Nach dem Verschieben des Gewichts ist darauf zu achten, dass der Kreisel nicht abrupt losgelassen wird, da sich sonst eine störende Nutation ausbildet, die die Messung verfälschen kann.

### 3. VERSUCHSAUSWERTUNG

#### 3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

##### 3.1.1 Statische Methode

Die Federkonstante D lässt sich mit folgender Gleichung berechnen:

$$D = \frac{mgr}{\varphi},$$

wobei der Kraftarm  $r = 6,8 \text{ cm}$  und  $g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$

Trägt man diesen Zusammenhang in einem  $\varphi - m$  Diagramm auf, so lässt sich die Federkonstante mittels der Geradensteigung  $k$  aus mehreren Messungen ermitteln.

$$\varphi = \frac{gr}{D} m = km$$

bzw.

$$D = \frac{gr}{k}$$

Der dazugehörige Größtfehler berechnet sich zu:

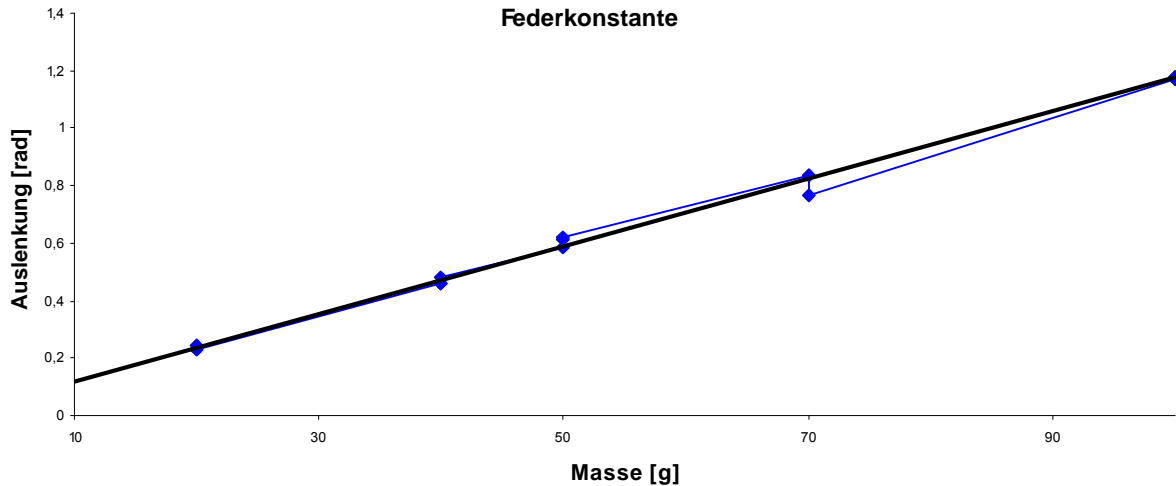
$$\Delta D = \left| \frac{mg}{j} \right| \Delta r + \left| \frac{mgr}{j^2} \right| \Delta j$$

Wir haben folgende Messungen durchgeführt und die Federkonstanten, sowie den Größtfehler berechnet:

Gewicht [g]	Auslenkung [°]	Auslenkung [rad]	Winkelrichtgröße [Nm/rad]	Größtfehler [Nm/rad]
20	13	0,2269	0,02940	0,0016
20	14	0,2443	0,02730	0,0014
20	13	0,2269	0,02940	0,0016
40	26,5	0,4625	0,02885	0,0010
40	26,5	0,4625	0,02885	0,0010
40	27,5	0,4800	0,02780	0,0009
50	33,5	0,5847	0,02852	0,0008
50	35	0,6109	0,02730	0,0008
50	35,5	0,6196	0,02692	0,0008
70	48	0,8378	0,02787	0,0007
70	48	0,8378	0,02787	0,0007
70	44	0,7679	0,03040	0,0008
100	67	1,1694	0,02852	0,0006
100	67,5	1,1781	0,02831	0,0006
100	67,5	1,1781	0,02831	0,0006

Aus diesen Messergebnissen ergibt sich eine Winkelrichtgröße von

$$D = (2,837 \pm 0,09) \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$$



Die Gerade weist eine, mit Hilfe linearer Regression berechnete Steigung von 0,0117 auf. Daraus ergibt sich eine Federkonstante von  $2,8507 \cdot 10^{-2} \pm 0,2833 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$

### 3.1.2 Dynamische Methode

Daten der Messapparatur:

	Stange	Zylinder	
Masse	0,03385 kg	0,24345 kg	0,2433 kg
		Gemittelt: 0,243375 kg	
Länge	$0,601 \pm 0,0005$ m	$0,0033 \pm 0,0005$ m	
Außenradius	$0,003 \pm 0,0005$ m	$0,0035 \pm 0,0005$ m	
Innenradius		$0,003 \pm 0,0005$ m	

Bei der Bestimmung der Masse der Stange ist uns wohl ein Fehler unterlaufen, bzw. wurde die Masse im Messprotokoll falsch festgehalten. Die Masse der Stange beträgt eigentlich 0,13385 kg. Dies ändert natürlich den Wert folgenden Rechnung zu

$$D = 4p^2 \frac{J}{T^2}, \text{ wobei}$$

$$J = \overbrace{\frac{1}{12} m_s (3r_s^2 + l^2)}^{J_{S \text{ tan ge}}} + 2 \overbrace{\left( \frac{1}{4} m_z \left( r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} l^2 \right) + m_z a^2 \right)}^{J_{\text{Zylinder}}}$$

$$J_{S \text{ tan ge}} = 0,004029197 \text{ kgm}^2$$

Bei den Messungen wurden folgende Genauigkeiten erzielt:

$$\Delta T = 0,05s$$

$$\Delta a = 0,0005m$$

Damit ergibt sich der Größtfehler zu:

$$\Delta D = \left| \frac{4p^2}{T^2} \Delta J_s + \left| \frac{4p^2}{T^2} \Delta J_z + \left| \frac{-8p^2 (J_s + J_z)}{T^3} \Delta T \right| \right| \right|, \text{ wobei}$$

$$\Delta J_s = \left| \frac{1}{12} (3r^2 + l^2) \Delta m + \left| \frac{1}{12} m 6r \Delta r + \left| \frac{1}{12} m 2l \Delta l \right| \right| \right|$$

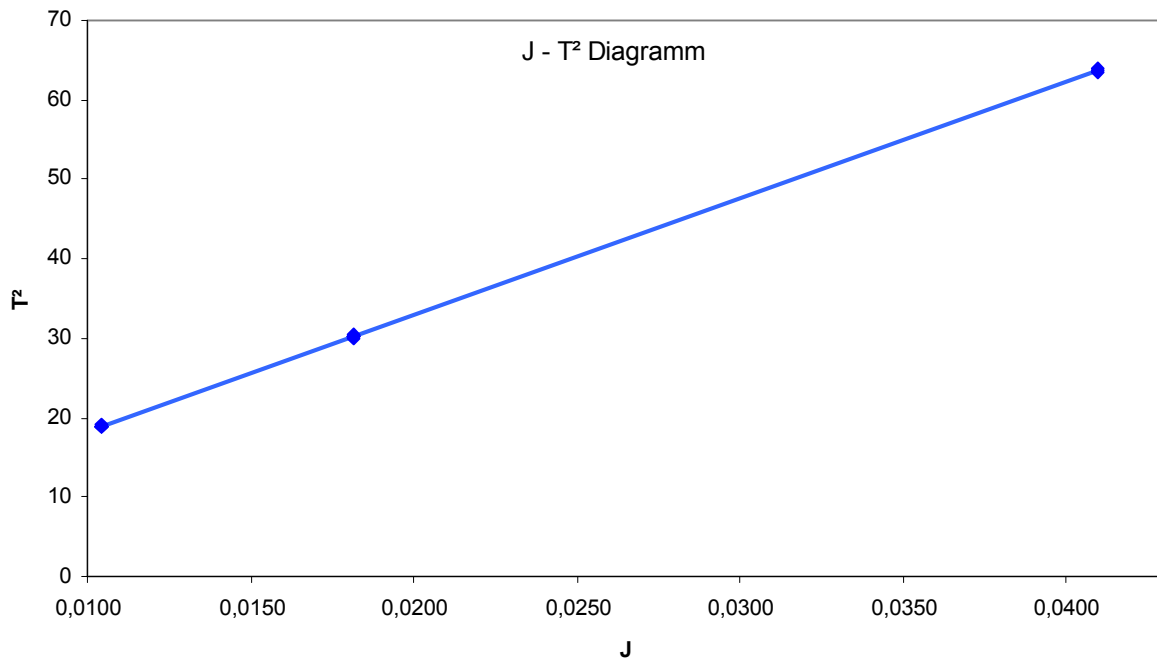
dieser errechnet sich zu  $7,1051 \cdot 10^{-6} \frac{Nm}{rad}$

$$\Delta J_z = \left| \frac{1}{4} (r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} l^2) + a^2 \Delta m + \left| \frac{1}{4} m 2r_a \Delta r_a + \left| \frac{1}{4} m 2r_i \Delta r_i + \left| \frac{1}{4} m \frac{2}{3} l \Delta l + |2m| \Delta a \right| \right| \right| \right|$$

In folgender Tabelle sind unsere Messwerte und Ergebnisse zusammengefasst:

Abstand der Zylinder von der Drehachse [m]	Anzahl der Perioden	Schwingungsdauer [sec]	$J_{Zylinder}$ (errechnet) [kgm <sup>2</sup> ]	$J_{gesamt}$ (errechnet) [kgm <sup>2</sup> ]	Winkelrichtgröße D [ $\frac{Nm}{rad}$ ]	$\Delta J_z$ (errechnet) [ $\frac{Nm}{rad}$ ]	Größtfehler [ $\frac{Nm}{rad}$ ]
0,284	5	40,53	0,03993	0,04396	0,02461	5,13998E-05	0,000357
0,284	5	40,09	0,03993	0,04396	0,02515	5,13998E-05	0,000368
0,284	5	39,81	0,03993	0,04396	0,02550	5,13998E-05	0,000376
0,284	5	39,95	0,03993	0,04396	0,02533	5,13998E-05	0,000372
0,284	5	39,88	0,03993	0,04396	0,02541	5,13998E-05	0,000374
0,184	4	21,99	0,01715	0,02118	0,02374	5,09318E-05	0,000570
0,184	4	21,98	0,01715	0,02118	0,02376	5,09318E-05	0,000571
0,184	5	27,40	0,01715	0,02118	0,02389	5,09318E-05	0,000575
0,184	5	27,49	0,01715	0,02118	0,02373	5,09318E-05	0,000570
0,184	5	27,56	0,01715	0,02118	0,02361	5,09318E-05	0,000566
0,184	5	27,51	0,01715	0,02118	0,02370	5,09318E-05	0,000569
0,184	5	27,49	0,01715	0,02118	0,02373	5,09318E-05	0,000570
0,184	5	27,44	0,01715	0,02118	0,02382	5,09318E-05	0,000573
0,134	5	21,70	0,00941	0,01344	0,02187	5,07728E-05	0,000756
0,134	4	17,42	0,00941	0,01344	0,02172	5,07728E-05	0,000748
0,134	4	17,50	0,00941	0,01344	0,02152	5,07728E-05	0,000739
0,134	4	17,33	0,00941	0,01344	0,02194	5,07728E-05	0,000759
0,134	5	21,76	0,00941	0,01344	0,02175	5,07728E-05	0,000750
0,134	5	21,73	0,00941	0,01344	0,02181	5,07728E-05	0,000753
0,134	5	21,67	0,00941	0,01344	0,02193	5,07728E-05	0,000759
0,134	5	21,80	0,00941	0,01344	0,02167	5,07728E-05	0,000746

Daraus ergibt sich eine Winkelrichtgröße von  $D = 2,768 \cdot 10^{-2} \pm 0,0591 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$



Die Gerade weist eine, mit Hilfe linearer Regression berechnete Steigung von 1464,7 auf. Aus dem Diagramm wird ersichtlich, dass es sich hierbei nicht um eine Ursprungsgerade handelt, da wir das Eigenträgheitsmoment der Befestigungsschrauben vernachlässigt haben. Die einzelnen Messpunkte sind jedoch so exakt aufgenommen, dass sie aufgrund der Auflösung hier als nur ein Punkt erscheinen. Das Ergebnis müsste also nahezu perfekt sein, wäre da nicht der y-Achsen-Abschnitt. Deshalb ergibt sich auch ein abweichender Wert für die Winkelrichtgröße:

$$D = 2,6953 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$$

Zusammenfassend haben wir bei den unterschiedlichen Versuchen und Auswertungsmethoden folgende Werte für D erhalten:

Statische Methode (rechnerisch)	$2,837 \cdot 10^{-2} \pm 0,09 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$
Statische Methode (graphisch)	$2,8507 \cdot 10^{-2} \pm 0,2833 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$
Dynamische Methode (rechnerisch)	$2,768 \cdot 10^{-2} \pm 0,0591 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$
Dynamische Methode (graphisch)	$2,6953 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$

Nun stimmt auch die Größe der dynamischen Methode mit den anderen Ergebnissen überein! Es wäre also nicht nötig gewesen die Richtgröße der Feder ohne die dynamische Methode zu mitteln. Da sich, wenn man jetzt das Richtmoment aus allen 4 Werten mittelt, ein Wert von  $D = 2,7878 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$  ergibt und sich dieser nur unmerklich von dem von uns zur weiteren Rechnung verwendeten Wert von  $D = 2,7943 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$  unterscheidet, verzichten wir darauf im Folgenden die Werte für die Richtgröße zu korrigieren.



### 3.2 Bestimmung der Hauptträgheitsmomente

Im Folgenden werden wir als Ergebnis der jeweiligen Rechnungen immer den Wert mit seinem Größtfehler angeben.

#### 3.2.1 Vollkugel

Für das Hauptträgheitsmoment einer Kugel um eine beliebige Achse durch den Schwerpunkt gilt:

$$J = \frac{2}{5}mr^2$$

Unsere Kugel hatte folgende Daten:

$$\begin{aligned} \text{Masse:} & \quad 0,7873 \pm 0,0001 \text{ kg} \\ \text{Radius:} & \quad 0,06845 \pm 0,0005 \text{ m} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das Trägheitsmoment rechnerisch zu:

$$J = 1,47553 \cdot 10^{-3} \pm 21,74 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

Aus der Messreihe ergibt sich

$$J = 1,4418 \cdot 10^{-3} \pm 20,20 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

Die Abweichung zum errechneten Wert liegt bei ca. 1%

#### 3.2.2 Kreisscheibe

Für das Trägheitsmoment der Kreisscheibe um ihre vertikale Symmetrieachse gilt:

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$

Unsere Scheibe hatte folgende Daten:

$$\begin{aligned} \text{Masse:} & \quad 0,34525 \pm 0,0001 \text{ kg} \\ \text{Radius:} & \quad 0,1115 \pm 0,0005 \text{ m} \end{aligned}$$

Daraus errechnet sich das Trägheitsmoment zu:

$$J = 2,146 \cdot 10^{-3} \pm 19,87 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

Aus der Messreihe ergibt sich

$$J = 1,960 \cdot 10^{-3} \pm 23,56 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

Die Abweichung zum errechneten Wert liegt bei ca. 1,1%

#### 3.2.3 Verifizierung des Satzes von Steiner

Das Trägheitsmoment der eingespannten Metallscheibe lässt sich rechnerisch ermitteln. Der dazugehörige Größtfehler lautet:

$$\Delta J = |mr|\Delta r + |2ma|\Delta a + \left| \frac{1}{2}r^2 + a^2 \right| \Delta m$$

Das selbe Trägheitsmoment erhält man, wenn man mittels der Gleichung  $J = \frac{DT^2}{4p^2}$  aus der bekannten Federkonstante und den gemessenen Schwingungsdauern rechnet. Dafür berechnet sich der Größtfehler zu:

$$\Delta J = \left| \frac{2TD}{4p^2} \right| \Delta T + \left| \frac{T^2}{4p^2} \right| \Delta D$$

Stellt man die ermittelten Werte vergleichend gegenüber so erhält man:

Abstand zur Drehachse a [cm]	J berechnet [kgm <sup>2</sup> ]	$\Delta J$ [kgm <sup>2</sup> ]	J gemessen [kgm <sup>2</sup> ]	$\Delta J$ [kgm <sup>2</sup> ]	Abweichung
0	$1,5195 \cdot 10^{-2}$	$0,0075 \cdot 10^{-2}$	$1,5793 \cdot 10^{-2}$	$6,687 \cdot 10^{-6}$	4%
4	$1,640 \cdot 10^{-2}$	$0,0108 \cdot 10^{-2}$	$1,6023 \cdot 10^{-2}$	$6,735 \cdot 10^{-6}$	2%
8	$2,003 \cdot 10^{-2}$	$0,01389 \cdot 10^{-2}$	$1,8642 \cdot 10^{-2}$	$7,265 \cdot 10^{-6}$	7%

### 3.3 Kreiselpräzession

Der Kreisel rotierte während des Versuchs mit einer Frequenz von 75,4 Hz. Daraus ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 473,752 \frac{1}{s}$ . Vor dem Versuch richteten wir den Kreisel so aus, dass er sich in Gleichgewichtslage befand. Diese lag bei einem Gewichtsabstand von 2,7 Inch, wobei 1 Inch = 0,0254 Metern entspricht.

Aus den Messreihen lassen sich nun die Präzessionsfrequenzen bestimmen:

Abstand v. Gleichgew. [m]	Zeit für 1 Umdrehung [s]	$\omega \left[ \frac{1}{s} \right]$	wirkendes Moment [Nm]
0,0127	53,964	0,1164	0,046657832
	53,208	0,1181	
	53,811	0,1168	
	52,254	0,1202	
	53,613	0,1172	
	Durchschnittliche Präzessionsfrequenz:	0,1177	
-0,0127	-93,861	0,0669	-0,04665783
	-93,798	0,0670	
	-92,169	0,0682	
	-93,753	0,0670	
	-93,924	0,0669	
	-93,942	0,0669	
Durchschnittliche Präzessionsfrequenz:	-0,0671		
0,00762	106,551	0,0590	0,027994699
	102,411	0,0614	
	105,021	0,0598	
	103,347	0,0608	
	104,58	0,0601	
	104,751	0,0600	
Durchschnittliche Präzessionsfrequenz:	0,0602		

Der Theorie zu Folge, müsste nun der Quotient aus dem wirkenden Moment und der Winkelgeschwindigkeit einen konstanten Wert ergeben. Dies ist bei unserer Messreihe leider nicht der Fall. Würde man die Präzessionsfrequenz über dem Drehmoment auftragen, so müsste sich eigentlich eine Ursprungsgerade ergeben. Und die Gerade hätte die Steigung 1/L. Wir haben leider zu wenige Messungen durchgeführt, um genauer sehen zu können, worin bei unseren Messungen der Fehler lag.

## 4. FEHLERDISKUSSION

### 4.1 Bestimmung der Federkonstanten

#### 4.1.1 Statische Methode

Die Hauptfehler bei der Ermittlung der Federkonstante  $D$  entstehen wahrscheinlich durch Ablesefehler der Winkelskala. Wie groß dieser Fehler ist, können wir leider nicht mit Bestimmtheit sagen. Allzu sehr dürften sie bei unserer Ablesetechnik jedoch nicht ins Gewicht gefallen sein. Zudem kann die Nulllage des Zeigers nur bis auf ca.  $0,5^\circ$  genau bestimmt werden. Die Reibung an der Umlenkrolle hat sicherlich auch einen Einfluss auf den Messwert. Ebenso die Reibung, die das Gewichtsschälchen mit der Tischkante verursacht hat.

#### 4.1.2 Dynamische Methode

Bei der Dynamischen Methode wurde das entstehende Trägheitsmoment durch die Halterung der Stange absichtlich nicht berücksichtigt. Dies führt zu einer Erhöhung des ermittelten Eigenträgheitsmoments.

Beim Messen neigt man dazu, große Amplituden zu benutzen, die ggf. den Hook'schen Bereich der Schraubenfeder übersteigen und die harmonische Schwingung beeinträchtigen. Weitere Messfehler sind ungenaue Zeitmessung, Dämpfung und Drehmomente aufgrund der Schwerkraft. Die Zeitmessfehler lassen sich zumindest durch Betrachtung mehrerer Perioden reduzieren. Die Qualität beider Meßmethoden zeigt sich beim Vergleich der ermittelten Konstanten, deren Abweichung voneinander mit ca 1% äußerst gering ist.

### 4.2 Trägheitsmoment von Holzkugel und Scheibe

Eine große Fehlerquelle bei der Ermittlung der Trägheitsmomente ist die geringe Schwingungsdauer des Systems. Die Messfehler aufgrund der Reaktionszeit sind deswegen nicht zu vernachlässigen.

### 4.3 Kreiselpräzession

Wie schon diskutiert, ist unsere Messreihe im Prinzip unbrauchbar. Da auch das Trägheitsmoment des Kreisels nicht bekannt war, konnte keine vergleichende Rechnung angestellt werden, um so vielleicht einen Fehler zu entdecken.

Mit Sicherheit wurde ein großer systematischer Fehler gemacht, wenn die Kreiselachse nicht waagrecht steht. Dann nämlich ist  $|\vec{F} \times \vec{r}| \neq |\vec{F}| \cdot |\vec{r}|$  und es wirkt ein kleineres Drehmoment. Dies kann dann der Fall sein, wenn man den Kreisel langsam nach unten gleiten lässt um die Nutationsbewegung zu unterdrücken. Weiterhin ist die Bestimmung von  $r$  etwas umständlich, denn die aufgetragene Inchsкала ist zur Messung nicht sinnvoll (zu große Unterteilung).

Zudem blieb die Drehzahl des Kreisels während der Messung nicht konstant, und es wurden (wenn auch nur geringe) Unterschiede des Drehimpulses ermittelt.

Die Zeitmessung selber dagegen ist sehr genau, da menschliche Fehler nicht in die Messung mit eingehen und der verwendete Aufbau sehr Präzise ist.

## 5. LITERATURVERZEICHNIS

- (1) H. Jex. *Skript zu Grundlagen der Physik I*. Universität Ulm, 2000/2001
- (2) Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. Fachbuchverlag Leipzig, 8. Auflage
- (3) P. Tipler. *Physik*. Spektrum Akademischer Verlag
- (4) W. Demtröder. *Experimentalphysik I*. Springer-Verlag
- (5) W. Walcher. *Praktikum der Physik*. Teubner Studienbücher, 6. Auflage
- (6) J.Meckler, J.Götz. *Versuchsprotokoll Nr.4 Drillachse*. 1998