

Grundpraktikum der Physik



Versuch 3: Freie und erzwungene Schwingung mit dem Drehpendel

Konrad Steible

Anne Götz

14. Oktober 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Mechanische harmonische Schwingungen	3
1.2	Harmonische Schwingung und Kreisbewegung	4
1.3	Die gedämpfte Schwingung	5
1.3.1	Der Schwingfall ($\delta < \omega_0$)	6
1.3.2	Der aperiodische Grenzfall ($\delta = \omega_0$)	7
1.3.3	Der Kriechfall ($\delta > \omega_0$)	7
1.3.4	Das logarithmische Dekrement	8
1.4	Die gedämpfte erzwungene Schwingung	8
2	Versuchsaufbau	12
3	Versuchsauswertung	14
3.1	Gedämpfte Schwingungen	14
3.1.1	Freie luftgedämpfte Schwingung	14
3.1.2	Gedämpfte Schwingung mit 0,2 A	14
3.1.3	Gedämpfte Schwingung mit 0,4 A	15
3.2	Gedämpfte erzwungene Schwingungen	16
3.2.1	Erzwungene Schwingung mit Dämpfung bei 0,2 A	16
3.2.2	Erzwungene Schwingung mit Dämpfung bei 0,4 A	17
3.3	Der Einschwingvorgang	18
3.4	Die Ergebnisse im Überblick	18
4	Fehlerdiskussion	19
5	Literaturverzeichnis	20

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Mechanische harmonische Schwingungen

Unter Schwingungen versteht man Vorgänge, bei denen sich eine physikalische Größe in Abhängigkeit von der Zeit **periodisch** ändert. Damit verbunden ist immer ein periodischer Wechsel zwischen zwei Energieformen. Bei mechanischen Schwingungen sind diese die potentielle und die kinetische Energie.

Die einfachste und gleichsam bedeutendste Schwingungsform ist die **harmonische Schwingung**. Bei dieser erfolgt die zeitliche Änderung der charakteristischen physikalischen Größe im Sinne einer Sinusfunktion.

Bei einer mechanischen Schwingung sind sowohl Weg und Geschwindigkeit, als auch die Beschleunigung Funktionen der Zeit. Wegen der Periodizität jeder Schwingung wiederholt sich der Bewegungsablauf nach einer als Schwingungsdauer bzw. Periodendauer bezeichneten Zeit T immer wieder.

Entstehen können solche mechanischen Schwingungen immer dann, wenn ein schwingungsfähiges System aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird. Was bedeutet, dass ihm Energie zugeführt wird z.B. in Form eines Impulses.

Bei der ungedämpften harmonischen Schwingung wirkt die Rückstellkraft $\vec{F}_R = -k\vec{x}$ proportional zur Auslenkung des Schwingers aus dessen Ruhelage und wird mit Hilfe einer Differentialgleichung dargestellt:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2)$$

Die **Richtgröße** k steht für die Beziehung zwischen der Rückstellkraft und der Auslenkung. (Bei einer Feder würde man von der Federkonstante bzw. der Federhärte D sprechen.)

Um diese **DGL 2. Ordnung** zu lösen verwendet man folgenden Ansatz:

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t) = 0 \quad (3)$$

Über die Umformung

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) \sin(\omega t) = 0 \quad (4)$$

erhält man die zeitabhängige Gleichung für eine ungedämpfte harmonische Schwingung:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5)$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

1.2 Harmonische Schwingung und Kreisbewegung

Zwischen harmonischen Schwingungen und Kreisbewegungen bei konstanter Geschwindigkeit besteht eine einfache aber sehr wichtige mathematische Beziehung.

Die Abbildung zeigt die Bewegung eines Teilchens, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius A bewegt.

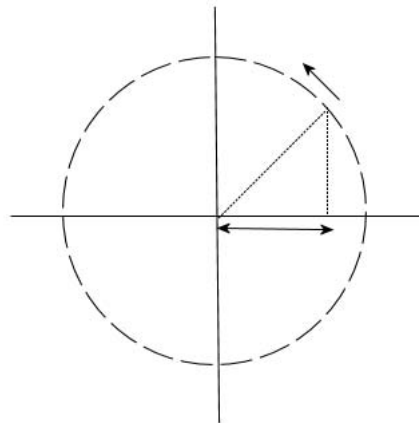


Abbildung 1: Geometrische Darstellung einer Kreisbewegung

Seine konstante Winkelgeschwindigkeit ω steht mit seiner Geschwindigkeit v über $\omega = \frac{v}{A}$ in Beziehung. Es schließt mit der x-Achse den Winkel θ ein

$$\theta = \omega t + \varphi \quad (6)$$

wobei φ der eingeschlossene Winkel zur Zeit $t = 0$ ist. Aus der Abbildung erkennt man, dass die x-Komponente des Teilchenortes:

$$x = A \cdot \cos \theta = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

ist. Dies ist die Definition des Kosinus! Sie ist die Projektion des Teilchenortes auf die x-Achse und entspricht auch exakt der Definition der harmonische Schwingung.

Es folgt also:

→ Die Projektion einer Kreisbewegung eines Teilchens mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf eine Achse beschreibt eine harmonische Schwingung.

Eine harmonische Schwingung und ihre dazugehörige Kreisbewegung haben beide die gleiche Frequenz und Periode.

Betrachtet man analog die Projektion auf die y-Achse, so liefert diese eine Sinusschwingung:

$$y = A \cdot \sin \theta = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \quad (8)$$

Somit kann man eine Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit als Überlagerung zweier senkrecht zueinander verlaufenden harmonischen Schwingungen auffassen, die zwar gleiche Amplitude und Frequenz, aber eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ haben.

1.3 Die gedämpfte Schwingung

Allgemein bezeichnet man als **Dämpfung** das kontinuierliche Abnehmen der Amplitude im Verlaufe einer Schwingung. Eine ungedämpfte Schwingung ist in der Natur ausgeschlossen, da die Energie des Systems immer durch bremsende Kräfte wie innere und äußere **Reibung**, Luftwiderstand u.Ä. allmählich aufgezehrt wird. Dabei nimmt natürlich auch die Amplitude mit der Zeit ab. Die Schwingung wird ausgelöscht.

Um diese Reibungskräfte in die Schwingungsgleichung mit einzubeziehen, nehmen wir an, dass diese geschwindigkeitsproportional sind:

$$\vec{F}_R = -\beta \cdot \dot{\vec{x}} \quad (9)$$

Damit folgt für die Differenzialgleichung

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \quad (10)$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (11)$$

Mit der Dämpfungskonstanten $\frac{\beta}{m} = 2 \cdot \delta$ und der Eigenfrequenz $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ergibt sich die

Gleichung der gedämpften harmonischen Schwingung:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (12)$$

Diese lineare homogene DGL 2.Ordnung wird mit dem Ansatz $x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda t}$ gelöst. Man erhält das charakteristische Polynom:

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \quad (13)$$

Löst man diese quadratische Gleichung mit Hilfe der Dämpfungskonstante, so folgt:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (14)$$

Es kann nun aufgrund der Diskriminante ein sehr unterschiedliches Verhalten des Schwingungssystems auftreten.

Man unterscheidet drei Fälle:

1. $\delta < \omega_0$: Schwingfall
2. $\delta = \omega_0$: Aperiodischer Grenzfall
3. $\delta > \omega_0$: Kriechfall

1.3.1 Der Schwingfall ($\delta < \omega_0$)

Mit der Abkürzung $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ gilt für die Lösung des Polynoms:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{-\omega^2} = -\delta \pm i\omega \quad (15)$$

und für die allgemeine Lösung der DGL der Schwingung ergibt sich nun:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-\delta t + i\omega t} + c_2 \cdot e^{-\delta t - i\omega t} \quad (16)$$

$$= e^{-\delta t} \cdot (c_1 \cdot e^{i\omega t} + c_2 \cdot e^{-i\omega t}) \quad (17)$$

$$= x_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t) \quad (18)$$

Man sieht hier, dass das schwingende System eine schwache Dämpfung erfährt. Die Amplituden werden von oben und unten von einer streng monoton abfallenden, bzw. steigenden e-Funktion eingehüllt, und nehmen deshalb exponentiell ab.

1.3.2 Der aperiodische Grenzfall ($\delta = \omega_0$)

Für diesen Fall erhalten wir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\delta$

Die Schwingung ist hier zu nur einer Auslenkung entartet, die mit einer linearen Steigung beginnt und dem Nullpunkt schneller zustrebt, als die Schwingung eines Kriechfalles.

Da die DGL, trotz der in diesem Fall stark vereinfachten Diskriminanten, zwei freie Integrationskonstanten enthalten muss, verwendet man den Ansatz:

$$x(t) = C(t) \cdot e^{\lambda t} \quad (19)$$

setzt man dies in die allgemeine DGL ein, so erhält man

$$\ddot{C} + (2\lambda + 2\delta) \cdot \dot{C} + (\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) \cdot C = 0 \quad (20)$$

Für die Lösung $\lambda = -\delta = -\omega_0$ werden zwei Vorfaktoren Null und es ergibt sich für C :

$$C = c_1 t + c_2 \quad (21)$$

Daraus erhält man nun die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung für diesen so genannten aperiodischen Grenzfall:

$$x(t) = (c_1 t + c_2) \cdot e^{-\delta t} \quad (22)$$

1.3.3 Der Kriechfall ($\delta > \omega_0$)

Der dritte Fall wird deswegen als Kriechfall bezeichnet, weil die Schwingung auch hier wieder aus einer einzigen Auslenkung besteht, die für $t \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Dies tut sie aber nur sehr langsam, man sagt sie "kriecht"!

Die Koeffizienten des Polynoms sind bei diesem Fall reel:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \alpha \quad (23)$$

Die allgemeine Lösung der DGL formuliert man nun in folgender Weise:

$$x(t) = e^{-\delta t} [c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}] \quad (24)$$

Wie man bereits aus Gleichung (23) sehen kann, setzt sich der Kriechfall aus zwei überlagerten Schwingungen zusammen. Die Amplitude der zweiten Schwingung fällt dabei noch schneller ab als die Amplitude beim aperiodischen Grenzfall. Die erste Schwingung jedoch klingt langsamer ab als beim Grenzfall (größerer Exponent). Zusätzlich wird durch Superposition mit der zweiten Schwingung die Gesamtamplitude größer als beim aperiodischen Grenzfall.

⇒ Die Amplitude beim Kriechfall fällt langsamer ab.

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass der Aperiodische Grenzfall und der Kriechfall im physikalischen Sinne keine Schwingungen mehr darstellen, da ihnen die Periodizität fehlt!

1.3.4 Das logarithmische Dekrement

Da sich jede Dämpfung unterschiedlich auf die Schwingung auswirkt führt man ein **Maß für die Stärke der Dämpfung** bzw. des Abklingens der Amplitude ein.

Man betrachtet dazu das Amplitudenverhältnis zweier aufeinanderfolgender Maxima:

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{x_0 \cdot e^{-\delta T} \cos(\omega t)}{x_0 \cdot e^{-\delta(t+T)} \cos(\omega(t+T))} \quad (25)$$

Durch logarithmieren ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\Rightarrow \ln e^{\delta T} = \delta T = \Lambda \quad (26)$$

Man nennt dies das **logarithmische Dekrement**. Nach der Zeit $t = \frac{1}{\delta}$ ist die Einhüllende $f(t) = A \cdot e^{-\delta t}$ der gedämpften Schwingung auf $\frac{1}{e}$ des Anfangswertes abgesunken. Da es aber physikalisch nicht sinnvoll ist, von mehreren Messungen nur diesen einen Messwert (bzw. einen interpolierten Wert) auszuwerten, trägt man die gemessenen Amplituden logarithmisch skaliert auf.

Durch die Periodizität lässt sich in obiger Gleichung der \cos -Term kürzen, ebenso x_0 . Die verbleibenden e -Funktionen lassen sich zu $e^{\delta n T}$ zusammenfassen. Durch Logarithmieren erhält man eine Geradengleichung mit der Dämpfungskonstanten δ als Steigung:

$$\delta n T = \ln \frac{x(t)}{x(t+nT)} \quad (27)$$

Dadurch lassen sich nun alle Messwerte zur Bestimmung der Dämpfungskonstante nutzen.

1.4 Die gedämpfte erzwungene Schwingung

Betrachtet man als Beispiel für eine mechanische Schwingung eine Feder, so kann diese eine im obigen Sinne harmonische Schwingung ausführen. Anstatt diese Feder an beiden Enden

fest zu halten, könnte man an einem Ende auch einen Motor ankoppeln, der eine periodisch wirkende Kraft auf die Feder ausübt. Auf die Masse der Feder wirkt dadurch eine zusätzliche Kraft.

Daher lautet die Bewegungsgleichung nun:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cdot e^{i\omega_A t} \quad (28)$$

wobei hier ω_A die Anregungsfrequenz darstellt.

Mit Hilfe des komplexen Lösungsansatzes kommt man recht elegant zu der Amplitudenfunktion der erzwungenen Schwingung. Da das System – einmal eingeschwungen – mit der Anregungsfrequenz weiterschwingt, wird die Amplitudenfunktion mit ω_A angesetzt:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{i(\omega_A t - \varphi)} \quad (29)$$

$$\dot{x}(t) = i\omega_A x_0 \cdot e^{i(\omega_A t - \varphi)} \quad (30)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_A^2 x_0 \cdot e^{i(\omega_A t - \varphi)} \quad (31)$$

einsetzen in die DGL ergibt:

$$-\omega_A^2 + 2\delta i\omega_A + \omega_0^2 = \frac{F_0}{x_0 m} \cdot e^{i\varphi} \quad (32)$$

Um an die Phase der Schwingung zu kommen, kann man nun den Imaginärteil vom Realteil der komplexen Gleichung trennen und den Quotienten bilden:

$$-\omega_A^2 + \omega_0^2 = \frac{F_0}{x_0 m} \cdot \cos(\varphi) \quad (33)$$

$$2\delta i\omega_A = \frac{F_0}{x_0 m} \cdot i \sin(\varphi) \quad (34)$$

$$\Rightarrow \frac{2\delta\omega_A}{-\omega_A^2 + \omega_0^2} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) \quad (35)$$

Da man aber auch etwas über die Amplitude wissen möchte, löst man obige Gleichung nach x_0 auf:

$$x_0 = \frac{F_0}{m} \cdot e^{i\varphi} \cdot \frac{1}{-\omega_A^2 + 2\delta i\omega_A + \omega_0^2} \quad (36)$$

da dies jedoch erst die komplexe Amplitude ist und man im Experiment die reelle benötigt, bildet man den Betrag

mit :

$$\sqrt{\frac{1}{a+ib} \cdot \frac{1}{a-ib}} = \frac{1}{\sqrt{(a+ib) \cdot (a-ib)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (37)$$

$$\Rightarrow |x_0| = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_A^2)^2 + (2\delta\omega_A)^2}} \quad (38)$$

Man nutzt an dieser Stelle aus, dass bei linearen Gleichungen komplexer Größen, sowohl Real- als auch Imaginärteil der komplexen Lösung jede für sich auch eine Lösung der Gleichung darstellt.

Differenziert man den Radikanden nach ω_A und setzt diese Ableitung gleich Null, so erhält man das Maximum der Amplitude:

$$\Rightarrow \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (39)$$

Zum Schluss soll noch die Halbwertsbreite der Resonanzkurve bestimmt werden. Die Amplitude wird für die Resonanzfrequenz ω_{max} maximal. Für diese Frequenz nimmt der Nenner in Gleichung (37) den Wert $2\delta\sqrt{(\omega_{max}^2 + \delta^2)}$ an.

Damit die Energie bei den zwei gesuchten Frequenzen $\omega_{1,2}$ auf genau die halbe Energie herabsinkt, muss der Radikand in dieser Gleichung den Wert:

$$(\omega_{max}^2 - \omega_{1,2}^2)^2 + (2\delta\omega_{1,2})^2 = 8\delta^2 (\omega_{max}^2 - \delta^2) \quad (40)$$

haben. Und hier kann man sehen, dass:

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_{max}^2 - 2\delta^2 \pm 2\delta\sqrt{\omega_{max}^2 - 2\delta^2} \quad (41)$$

Für die gesuchte volle Halbwertszeit $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ gilt dann folglich:

$$\Delta\omega = \left\langle \omega_{max}^2 + 2\delta\sqrt{\omega_{max}^2 + \delta^2} \right\rangle^{\frac{1}{2}} - \left\langle \omega_{max}^2 - 2\delta\sqrt{\omega_{max}^2 + \delta^2} \right\rangle^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

Hier kann man sehen, dass für $\delta = 0 \rightarrow \Delta\omega = 0$ und somit die Amplitude gegen unendlich geht. Es tritt die so genannte Resonanzkatastrophe ein.

Anders sieht es aus für $\delta \ll \omega_{max}$

Wegen

$$\omega_{1,2}^2 - \omega_{max}^2 = (\omega_{1,2} + \omega_{max}) \cdot (\omega_{1,2} - \omega_{max}) \approx 2\omega_{max} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \Delta\omega \quad (43)$$

gilt für die Halbwertsbreite der Resonanzkurve:

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{2\delta}{\omega_{max}} \cdot \sqrt{\omega_{max}^2 + \delta^2} \approx 2\delta \quad (44)$$

2 Versuchsaufbau

Bei diesem Versuch handelt es sich um ein Drehpendel. Dieses besteht aus einem dünnen Metallring, der in seinem Mittelpunkt, seiner Drehachse möglichst reibungsfrei und drehbar gelagert ist. In der Mitte ist zudem eine Spiralfeder angebracht, die mit ihrem einen Ende an der Drehscheibe befestigt ist, und mit dem anderen Ende an einem um die Drehachse drehbaren Hebel. Ein kleiner Elektromotor kann diesen Hebel über eine weitere dünne Stange in eine periodische Bewegung versetzen. Hierbei wird das innere Ende der Spiralfeder sinusförmig hin und her bewegt und so auf den äußeren Metallring ein Drehmoment ausgeübt.

Über einen Zeiger kann die Amplitude der Schwingung an einer Skala abgelesen werden, die im Kreis um die Feder mit dem Ring befestigt ist.

Als Bremse dient in diesem Fall eine so genannte Wirbelstrombremse.

Der Metallring des Drehpendels läuft zwischen den zwei Spulen des angeschlossenen Elektromagneten hindurch, dessen Erregung durch den Spulenstrom eingestellt wird. Bei einem Kreisleiter wird nur ein Induktionsstrom erzeugt, beim Eintritt in das Feld und wiederum beim Austritt aus dem Magnetfeld.

In unserem Versuch ging es darum, bei einer bestimmten vorgegebenen Dämpfung die Eigenfrequenz, das logarithmische Dekrement und die Dämpfungskonstanten zu bestimmen. Dazu wurden die Amplituden und die jeweiligen Schwingungsdauern gemessen.

Im zweiten Teil ging es um die erzwungene gedämpfte Schwingung. Hier wurden bei verschiedenen Motoreinstellungen die maximalen Amplituden im eingeschwungenen Zustand abgelesen. Mit Hilfe der Halbwertsbreite und der Phasenkurve konnte dann ebenfalls die Dämpfung bestimmt werden.

Nun zum Einschwingvorgang, dem letzten Teil des Versuchs: Es gelten die Anfangsbedingungen: $A(t=0) = 0 = \dot{A}(t=0)$,

wobei A die Amplitude darstellt zur Zeit t .

In Abhängigkeit von der Erregerfrequenz soll der Einschwingvorgang bei der Dämpfung mit 0,2 A untersucht werden.

Im Resonanzfall werden wieder die maximalen Amplituden gemessen und als Funktion der Zeit in ein Diagramm übertagen. Näherungsweise kann man den Verlauf der Kurve wie folgt beschreiben:

$$A(t) = A_0 \cdot (1 - e^{-\delta t}) \cdot \sin(\omega t) \quad (45)$$

dies hängt von den Anfangsbedingungen ab!

Es folgt aus dieser Relation:

$$\delta = -\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{A_0 \sin(\omega t)}{A(t)} \quad (46)$$

Wie zuvor ist es jedoch sinnvoller, die Dämpfungskonstante aus der linearen Regression mit allen Messwerten zu bestimmen. Dadurch wird analog zu Gleichung (27) umgeformt:

$$\delta t = -\ln\left(1 - \frac{A(t)}{A_{max}}\right) \quad (47)$$

A_{max} ist dabei die Amplitude im eingeschwungenen Zustand, die man für $t \rightarrow \infty$ erhält.

Mit der im eingeschwungenen Zustand gemessenen Maximalamplitude lässt sich jetzt die Dämpfungskonstante berechnen. Zudem kann man bei bekannter Erregerfrequenz aus der Schwebungsfrequenz die Resonanzfrequenz des Systems ermitteln. Beobachtet man nämlich den Verlauf der Amplituden etwas 5 bis 20 Prozent neben der Resonanzfrequenz, so kann man deutliche Schwebungen der Maximalamplitude feststellen.

Grund dafür, dass man die Resonanzfrequenz aus der Schwebungsfrequenz bestimmen kann ist:

dass man für $\omega = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)$ unter den obigen Anfangsbedingungen bei schwacher Dämpfung ω mit ω_0 gleichsetzen kann.

Für den Einschwingvorgang gilt dann näherungsweise:

$$A(t) = A_0 \cdot (1 - e^{-\delta t}) \cdot \sin(\omega t) \quad (48)$$

$$A(t) = A_0 \cdot (\cos(\omega t - \varphi) - e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_0 - \varphi)) \quad (49)$$

3 Versuchsauswertung

3.1 Gedämpfte Schwingungen

3.1.1 Freie luftgedämpfte Schwingung

Durch unsere Messungen ergaben sich für das durch Luft gedämpfte Drehpendel folgende Werte:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = 1,012 \pm 0,002 \quad (50)$$

$$\Delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = 0,0012 \pm 0,002 \quad (51)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{T} = 0,006 \pm 0,003 \frac{1}{s} \quad (52)$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2} = 3,203 \pm 0,001 \frac{1}{s} \quad (53)$$

Wie erwartet ist die Dämpfungskonstante δ für Luftreibung sehr gering. Das wird auch am Verhältnis von aufeinanderfolgenden Amplituden ersichtlich, da dieses sehr nahe bei 1 liegt. Die Amplitude ändert sich nur gering von einer Periode zur nächsten, die Schwingung ist nahezu ungedämpft.

3.1.2 Gedämpfte Schwingung mit 0,2 A

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = 1,118 \pm 0,008 \quad (54)$$

$$\Delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = 0,112 \pm 0,007 \quad (55)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{T} = 0,057 \pm 0,002 \frac{1}{s} \quad (56)$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2} = 3,182 \pm 0,009 \frac{1}{s} \quad (57)$$

Für die erste Dämpfung mit der Wirbelstrombremse fällt die Amplitude pro Periode deutlich stärker ab als bei Luftreibung zuvor. Das Verhältnis aufeinanderfolgender Amplituden ist nun bereits deutlich größer als 1 und die Dämpfungskonstante ist um nahezu Faktor 10 größer. Wie erwartet verringert sich dadurch die Schwingungsfrequenz des Systems etwas.

3.1.3 Gedämpfte Schwingung mit 0,4 A

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = 1,482 \pm 0,059 \quad (58)$$

$$\Delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = 0,393 \pm 0,036 \quad (59)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{T} = 0,198 \pm 0,011 \frac{1}{s} \quad (60)$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2} = 3,167 \pm 0,005 \frac{1}{s} \quad (61)$$

Mit noch stärkerer Dämpfung durch die Wirbelstrombremse verringert sich die Schwingungsfrequenz weiter, und die Amplitude fällt pro Periode etwa auf 2/3 der vorigen Amplitude ab. Die Dämpfung nahm dabei nicht linear mit der angeschlossenen Stromversorgung (von 0,2A auf 0,4A) zu, sondern deutlich stärker (etwa Faktor 3,5). Das kann einerseits an einer etwas fehlerbehafteten Wirbelstrombremse, andererseits an nicht ganz exakt eingestellten Stromstärken während des Versuchs liegen.

3.2 Gedämpfte erzwungene Schwingungen

3.2.1 Erzwungene Schwingung mit Dämpfung bei 0,2 A

Für die Resonanzfrequenz der gedämpften erzwungenen Schwingung ergibt sich aus der grafischen Auswertung (siehe Anhang):

$$\omega_R = 3,18 \pm 0,01 \frac{1}{s} \quad (62)$$

Die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ der Schwingung ist dann:

$$\Delta\omega = 0,095 \pm 0,02 \frac{1}{s} \quad (63)$$

Aus diesem Wert kommt man nun zur Dämpfung:

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{2} = 0,047 \pm 0,01 \frac{1}{s} \quad (64)$$

Und hieraus kann man jetzt die Eigenfrequenz berechnen:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2} = 3,181 \pm 0,01 \frac{1}{s} \quad (65)$$

Alternativ erhält man die Dämpfung auch aus der Steigung der Phasenkurve:

$$\delta = \frac{d\omega}{d\varphi} = 0,041 \pm 0,02 \frac{1}{s} \quad (66)$$

Daraus ergibt sich eine Eigenfrequenz von:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2} = 3,181 \pm 0,02 \frac{1}{s} \quad (67)$$

Die Ergebnisse entsprechen in etwa den Werten aus den Versuchen ohne Motor, die Dämpfung fällt etwas geringer aus. Dies lässt sich durch eine nicht exakt eingestellte Stromstärke erklären, worauf die Wirbelstrombremse wohl sehr empfindlich reagiert.

3.2.2 Erzwungene Schwingung mit Dämpfung bei 0,4 A

Für die Resonanzfrequenz der Schwingung ergibt sich hier:

$$\omega_R = 3,13 \pm 0,02 \frac{1}{s} \quad (68)$$

Die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ der Schwingung ist dann:

$$\Delta\omega = 0,37 \pm 0,06 \frac{1}{s} \quad (69)$$

Aus diesem Wert errechnet sich nun die Dämpfung:

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{2} = 0,185 \pm 0,03 \frac{1}{s} \quad (70)$$

Und hieraus kann man jetzt die Eigenfrequenz berechnen:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2} = 3,141 \pm 0,02 \frac{1}{s} \quad (71)$$

Aus der Phasenkurve erhält man:

$$\delta = \frac{d\omega}{d\varphi} = 0,16 \pm 0,03 \frac{1}{s} \quad (72)$$

und damit die Eigenfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2} = 3,138 \pm 0,02 \frac{1}{s} \quad (73)$$

Wieder fällt die Dämpfung etwas geringer aus als nach dem ersten Versuchsteil erwartet. Die Eigenfrequenz ist nun schon deutlich geringer als bei der Dämpfung mit Luft oder 0,2A. Obwohl bei der grafischen Auswertung eher großzügige Ablesungenauigkeiten eingeräumt wurden, bleibt die Genauigkeit der Ergebnisse fragwürdig, da schon Abweichungen einiger weniger Messwerte große Auswirkungen auf die Resultate haben können. Insgesamt decken sich die Ergebnisse aber gut mit den vorigen Werten, und auch der Verlauf der Kurven lässt auf relativ gute Messwerte schließen (siehe Anhänge).

3.3 Der Einschwingvorgang

Im letzten Versuchsteil wurde das System nun bei geringer Dämpfung mit 0,2A jeweils mit Resonanzfrequenz sowie mit 5% und 20% geringerer Frequenz aus der Ruhe angeregt. Während die bei 5% und 20% erhaltenen Schwebungen mit nur wenigen brauchbaren Messwerten keine vernünftige Auswertung zulassen, lässt sich aus dem Einschwingvorgang bei Resonanzfrequenz mit linearer Regression (siehe Anhang) die Dämpfungskonstante Δ bestimmen:

$$\delta = 0,099 \pm 0,001 \frac{1}{s} \quad (74)$$

Die Schwingungsfrequenz lässt sich aus der Periodendauer der Schwingung errechnen:

$$\omega = 3,177 \pm 0,02 \frac{1}{s} \quad (75)$$

Diese Werte entsprechen relativ genau den bisherigen Ergebnissen aus den Versuchen mit 0,2A-Dämpfung. Der sehr glatte Verlauf der Amplitude beim Einschwingvorgang (siehe Anhang) lässt wieder auf gute Messwerte schließen.

3.4 Die Ergebnisse im Überblick

Alle Ergebnisse der einzelnen Versuchsteile zusammengetragen:

Freie gedämpfte Schwingung:

Dämpfung	$\delta[\frac{1}{s}]$	$\omega[\frac{1}{s}]$
Luft	$0,006 \pm 0,003$	$3,203 \pm 0,001$
0,2A	$0,057 \pm 0,002$	$3,182 \pm 0,009$
0,4A	$0,198 \pm 0,011$	$3,167 \pm 0,005$

Gedämpfte erzwungene Schwingung:

Dämpfung	$\omega_R[\frac{1}{s}]$	Ampl. $\delta[\frac{1}{s}]$	Ampl. $\omega_0[\frac{1}{s}]$	Phase $\delta[\frac{1}{s}]$	Phase $\omega_0[\frac{1}{s}]$
0,2A	$3,18 \pm 0,01$	$0,047 \pm 0,01$	$3,181 \pm 0,01$	$0,041 \pm 0,02$	$3,181 \pm 0,02$
0,4A	$3,13 \pm 0,02$	$0,185 \pm 0,03$	$3,141 \pm 0,02$	$0,16 \pm 0,03$	$3,138 \pm 0,02$

Einschwingvorgang:

Dämpfung	$\delta[\frac{1}{s}]$	$\omega[\frac{1}{s}]$
0,2A	$0,099 \pm 0,001$	$3,177 \pm 0,02$

4 Fehlerdiskussion

Der wohl grösste Fehler dieser Messungen ist die Ablesegenauigkeit. Alle Amplituden wurden anhand der Skala auf dem Kreis um das Drehpendel abgelesen. Die Skala war nicht besonders fein gerastert, man konnte nur schwer genau senkrecht draufschauen und es war meist nicht möglich den genauen Wert abzulesen, insbesondere bei der kurzen Periodendauer. Bei den erzwungenen Schwingungen war es nicht immer eindeutig, wann der Einschwingvorgang beendet war und wir haben anhand unserer Messergebnisse feststellen müssen, dass wir wohl zwei mal zu früh angefangen haben zu messen.

Ein weiterer nennenswerter Fehler des Versuchs, waren leichte Schwankungen der Stromstärke, was die Dämpfung natürlich enorm beeinflusste. Wenn man jedoch dagegen die Ablesegenauigkeit betrachtet, dann ist dieser Fehler sehr klein!

5 Literaturverzeichnis

1. Dieter Meschede: Gerthsen Physik
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002, 21.Auflage
2. Demtröder: Experimentalphysik 1 (Mechanik und Wärme)
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004, 3.Auflage
3. Horst Kuchling: Taschenbuch der Physik
Fachbuchverlag Leipzig, 2004, 18.Auflage
4. P.A. Tipler: Physik
Spektrum Akademischer Verlag Berlin Oxford, 1995, 1.Auflage
5. W.Walcher: Praktikum der Physik
Teubner Studienbücher Physik, 1989, 6.Auflage
6. Skript zur Vorlesung Grundlagen I von Prof. P.C.Hägele, 2004-2005
7. F.K.Kneubühl: Repetitorium der Physik
Teubner Studienbücher, 1995