Anfängerpraktikum
Versuch 3

Freie und erzwungene Schwingungen mit dem Drehpendel

Gruppe WP 8

Uwe Schwarz

uwe.schwarz@student.uni-ulm.de

Stefan Rapski

huha@gmx.de

Gruppe WP 4

Stefan Mohr

stefan.mohr@uni-ulm.de

29. März 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie **3**

1.1 Mechanische Schwingungen . . . 3

1.1.1 Die freie harmonische Schwingung . . . 3

1.1.2 Die freie gedämpfte Schwingung . . . 4

1.1.3 Erzwungene Schwingungen . . . 7

1.1.4 Resonanz/Resonanzkurve . . . 9

1.2 Übertragung der gedämpften Schwingungsgleichung auf das Drehpendel . . . 12

2 Versuchsbeschreibung **13**

2.1 Aufbau des Drehpendels . . . 13

2.2 Die freie, gedämpfte Schwingung in Luft . . . 13

2.3 Die freie, gedämpfte Schwingung mit Wirbelstrombremse . . . 13

2.4 Die erzwungene Schwingung . . . 13

3 Versuchsauswertung **14**

3.1 Freie gedämpfte Schwingungen . . . 14

3.1.1 Formeln zur Auswertung . . . 14

3.1.2 Luftgedämpfte Schwingung . . . 14

3.1.3 Leichte Dämpfung . . . 15

3.1.4 Starke Dämpfung . . . 15

3.2 Erzwungene Schwingungen . . . 16

3.2.1 Schwache Dämpfung . . . 16

3.2.2 Starke Dämpfung . . . 17

3.2.3 Schwebung . . . 17

3.2.4 Einschwingvorgang . . . 18

4 Fehlerdiskussion **19**

1 Theorie

1.1 Mechanische Schwingungen

Schwingungen entstehen, indem ein Sytem leicht aus einer stabilen Gleichgewichtslage ausgelenkt wird. Zum Beispiel lassen sich Federn durch Stauchung oder Dehnung in Schwingung versetzen. Andere Schwingungssysteme sind das Fadenpendel oder Flüssigkeiten im U-Rohr. Grundsätzlich unterscheidet man die freie harmonische, die freie gedämpfte und die erzwungene Schwingung.

1.1.1 Die freie harmonische Schwingung

Der einfachste Fall ist die freie harmonische Schwingung. In einem System wird eine Masse aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt und erfährt eine Rückstellkraft F_R proportional zur Auslenkung und dieser entgegen gerichtet. Es gilt ein lineares Kraftgesetz, und zwar solange dies im Hookeschen Bereich erfolgt. Mit Hilfe des zweiten Newton‘schen Axioms erhält man folgenden Zusammenhang:

$$\tfrac{dp}{dt} = m\ddot{x} = -Dx$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \tag{1}$$

Hierbei handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese lässt sich mit folgendem Ansatz lösen:

$$x(t) = \hat{x}\cos(\omega t)$$

Hierzu die zweite Ableitung nach der Zeit:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\hat{x}\cos(\omega t)$$

Das ganze nun in (1) eingesetzt liefert

$$(-\omega^2 + \tfrac{D}{m})\hat{x}\cos(\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\tfrac{D}{m}}$$

Im Folgenden steht ω_0 immer für die Kreisfrequenz der freien harmonischen Schwingung.

1.1.2 Die freie gedämpfte Schwingung

Bei der freien gedämpften Schwingung treten neben der Rückstellkraft zusätzlich noch Reibungsverluste auf. Diese Dämpfung kommt durch Luftwiderstände oder mechanische Reibung zustande und ist von der Geschwindigkeit abhängig. Man kann sie auch künstlich erzeugen, beispielsweise mit einer Wirbelstrombremse. Hierbei wird in einem bewegten Objekt zwischen einem Elektromagneten ein ringförmiger Strom induziert. Dadurch entsteht eine Kraft, die der Bewegung entgegen wirkt und somit das Objekt abbremst. Ausfhrlicher beschrieben in [1] Wenn man nun diese Reibungskraft zu der Kräftebilanz der freien harmonischen Schwingung hinzufügt erhält man

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$$

Hieraus und mit den Abkürzungen $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ und $2\delta = \frac{k}{m}$ ergibt sich die Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

Diese löst man mit dem Ansatz

$$x(t) = \hat{x}e^{\lambda t}$$

Setzt man dies nun oben ein erhält man

$$(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)\hat{x}e^{\lambda t} = 0 \tag{3}$$

und dazu die Lösungen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{4}$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden. Je nachdem ob der Radikand der Wurzel aus (4) positiv, negativ oder Null ist, spricht man entweder vom Schwing-, Kriech- oder aperiodischen Grenzfall.

Der aperiodische Grenzfall tritt also auf, wenn gilt

$$\delta = \omega_0$$

Dann ist

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\hat{x}e^{+\delta t}$$

eine Lösung von (3). Man nennt dies auch kritische Dämpfung.

Der Kriechfall tritt in Erscheinung, wenn gilt

$$\delta > \omega_0$$

Dann folgen mit

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

und

$$\lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

zwei Lösungen von (3). Man spricht hierbei auch von einer überkritischen Dämpfung. Als Lösung ergibt sich

$$x(t) = \hat{x}\left(A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}\right)$$

Die graphische Darstellung von Kriechfall und aperiodischem Grenzfall befindet sich auf Seite 5. Man kann erkennen, dass der aperiodische Grenzfall eine weit stärkere Dämpfung darstellt als die überkritische Dämpfung. Er stellt also die schnellste Möglichkeit dar, die Gleichgewichtslage eines Schwingsystems herzustellen. Dieses Phänomen wird z.B. dazu benutzt, bei analogen Messgeräten den Zeiger sofort in die Nullstellung zu bringen, anstatt warten zu müssen bis er sich beruhigt hat.

Im Schwingfall, auch unterkritische Dämpfung genannt, gilt

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i\omega$$

mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Wiederum in (3) eingesetzt erhält man nun

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{i\omega t} \text{ mit dem}$$

$$\text{Realteil } Re = \hat{x}e^{-\delta t}\cos(\omega t) \text{ und dem}$$

$$\text{Imaginärteil } Im = \hat{x}e^{-\delta t}\sin(\omega t)$$

Am Realteil kann man den Verlauf der Schwingung ablesen, die e-Funktion als Einhüllende, der Cosinus beschreibt die Auslenkung.

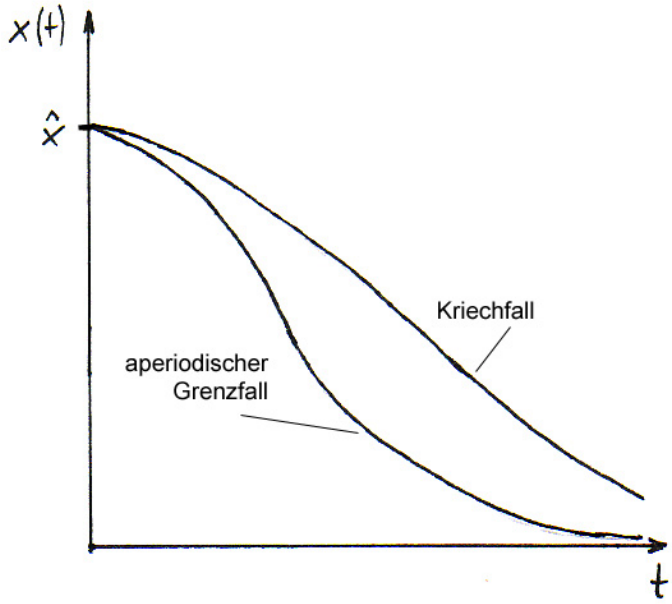

Abbildung 1: Aperiodischer Grenzfall und Kriechfall

Das logarithmische Dekrement Λ wird definiert, um ein Maß für die Stärke der Dämpfung zu erhalten. Dazu bildet man den Quotienten zweier nebeneinanderliegender Amplitudenmaxima und setzt diesen mit der Einhüllenden (der e-Funktion) gleich:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{+\delta T}$$

Beide Seiten logarithmiert ergibt das logarithmische Dekrement

$$\Lambda = ln\left(\frac{A_n}{A_{(n+1)}}\right) = \delta T \tag{5}$$

Man definiert das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden V:

$$V := \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

Für den Fehler von V erhält man

$$V_\nu := V \pm \triangle V = \frac{A_n}{A_{n+1}} \pm \left(\left|\frac{\triangle A_n}{A_{n+1}}\right| + \left|\frac{-A_n \triangle A_{n+1}}{A_{n+1}^2}\right|\right)$$

Eingesetzt in Formel (5) erhält man

$$V_\nu = ln(V \pm \triangle V) = ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) \pm \left(\left|\frac{\triangle A_n}{A_{n+1}}\right| + \left|\frac{\triangle A_{n+1}}{A_{n+1}}\right|\right)$$

Die genaue Rechnung hierzu kann man in [2] nachlesen.

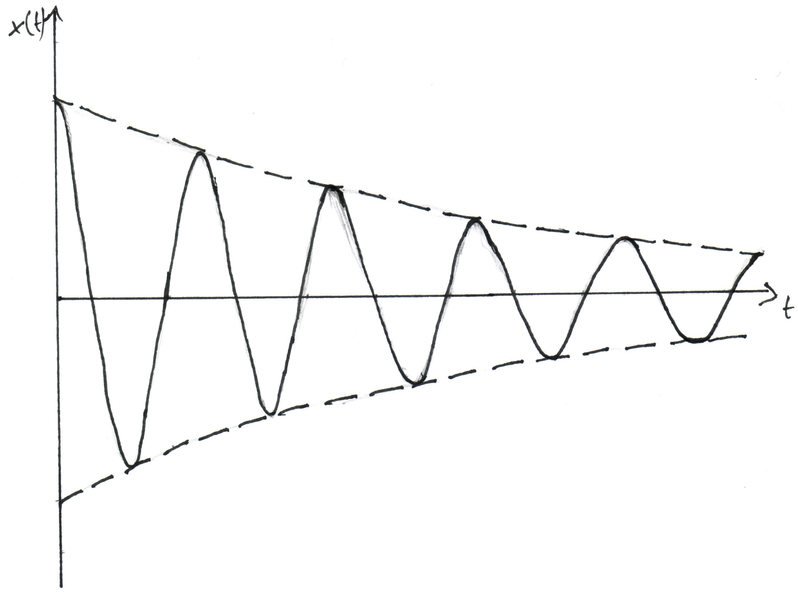

Abbildung 2: Schwingfall

1.1.3 Erzwungene Schwingungen

Wenn man auf einen gedämpften freien Schwinger eine periodische Kraft F_a wirken lässt, so nimmt das System nach einer einer Zeit $\triangle t$ die Kreisfrequenz der der Kraft an. Das System schwingt zuerst in seiner in einer Überlagerung aus Eigenfrequenz und der anregenden Frequenz. Die Intensität der Eigenfrequenz wird durch die Dämpfung des Systems kontinuierlich verringert, bis es nur noch in der anregenden Frequenz schwingt. Diese Zeit nennt man die Einschwingphase. Eine derartige Schwingung nennt man *erzwungene Schwingung.* Erweitert man nun die die Gleichung der der freien gedämpften Schwingung um eine periodische Kraft F_a so erhält man folgenden inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = \frac{F}{m}e^{i\omega_a t} \tag{6}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich mit Hilfe einer e-Funktion loesen.

$$x(t) = \hat{x}e^{i(\omega_a t+\varphi)}$$

$$\dot{x}(t) = \hat{x}i\omega_a e^{i(\omega_a t+\varphi)}$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 e^{i(\omega_a t+\varphi)}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Gleichung ein, so erhält man:

$$\omega_0^2 - \omega_a^2 + 2\delta i\omega_a = \frac{F}{m\hat{x}}e^{-i\varphi} \tag{7}$$

Dieser Ausdruck lässt sich in einen Real- und in einen Imaginärteil zerlegen.

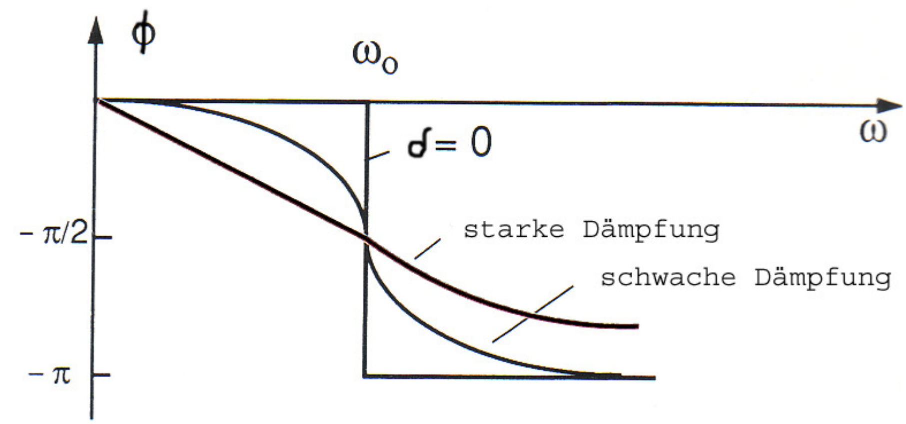

Abbildung 3: Phasenverschiebung in Abhngigkeit von der Frequenz [4]

$$\omega_0^2 - \omega_a^2 = \tfrac{F}{m\hat{x}} \cos\varphi = Re$$

$$2\delta\omega_a = \tfrac{F}{m\hat{x}} \sin\varphi = Im$$

Dividiert man nun Imaginärteil durch Realteil so erhält man die Phase φ.

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}\right) \tag{8}$$

Der Verlauf von der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz lässt sich so darstellen:

Wie man sieht hängt dieser von der Dämpfung ab.

Um die Amplitude $\hat{x}$ der erzwungenen Schwingung zu erhalten multipliziert man die Amplitude mit deren komplex konjugiertem und zieht daraus die Wurzel.

$$\hat{x} = \tfrac{F}{m} \tfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\delta\omega_a)^2}}$$

Bei dieser Formel handelt es sich um die Loesung für den inhomogenen Anteil. Die Gesamtlösung für die Gleichung lautet:

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} e^{i\omega_0 t} + A e^{i(\omega_a t + \varphi)} \tag{9}$$

Der homogene Anteil der Lösung beschreibt die Eigenschwingung des Systems. Diese wird mit zunehmendem t immter kleiner und strebt gegen Null. Den Zeitraum, bis dieser Term Null wird nennt man die *Einschwingphase*. Danach schwingt das System in der Frequenz der periodischen Kraft die auf es wirkt. Dies bezeichnet man als den *stationären Fall*

1.1.4 Resonanz/Resonanzkurve

Bei einem schwingenden System tritt *Resonanz* auf, wenn es mit einer periodischen Kraft F mit der Frequenz ν gleich seiner Eigenfrequenz ν_0 angeregt wird. Es entsteht eine positive Überlagerung der Amplituden, da das System ständig Energie aufnimmt. Wird nicht genügend gedämpft, also Energie durch Reibung verzehrt, so wächst die Amplitude bis ins Unendliche bzw. bis an die Grenzen, die zur Zerstörung des Systems führen. Werden diese erreicht, so spricht man von einer *Resonanzkatastrophe*.

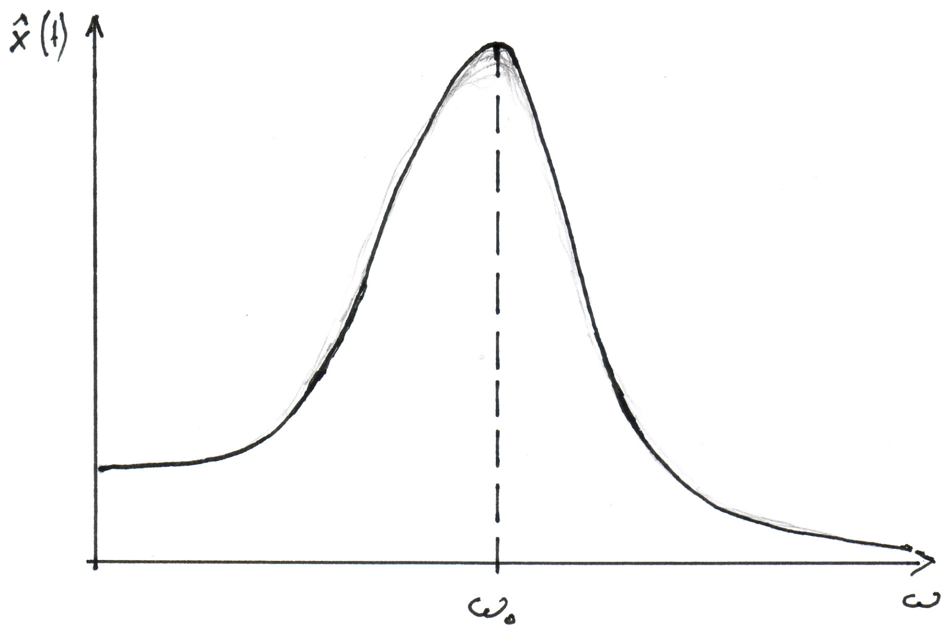

Abbildung 4: Resonanzkurve

Je breiter diese Kurve ist, desto stärker ist die Dämpfung des Systems.
Für das Maximum der Kreisfrequenz erhält man aus der Differentiation des Imaginärteils von Gleichung (9):

$$\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Die Halbwertsbreite gehört ebenfalls zum Informationsgehalt der Resonanzkurve. Durch Differentiation der Amplitudenfunktion nach der Kreisfrequenz lässt sich $\hat{\omega}$ bestimmen

$$\frac{d\hat{A}}{d\omega} = \frac{-F2\omega(\omega_0^2 - \omega^2) - 4\delta^2\omega}{m\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\delta^2\omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Diese Ableitung hat für $\omega = \hat{\omega}$ den Wert Null. Also gilt

$$\hat{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Die Gleichung für die Phase (8) nach ω differenziert liefert

$$\frac{d\varphi}{d\omega_a} = \frac{d}{d\omega_a}\arctan\left(\frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{4\delta^2\omega_a^2}{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2}} \cdot \frac{2\delta(\omega_0^2 - \omega_a^2) + 4\delta\omega_a^2}{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2} = \frac{2\delta(\omega_0^2 - \omega_a^2) + 4\delta\omega_a^2}{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + 4\delta^2\omega_a^2}$$

An der Stelle $\omega_a = \hat{\omega}$ ergibt dies letztlich

$$\frac{d\varphi}{d\omega_a} = \frac{2\delta(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) + 4\delta\hat{\omega}^2}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\delta^2\hat{\omega}^2} = \frac{4\delta^3 + 4\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{4\delta^4 + 4\delta^2\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} = \frac{1}{\delta}$$

Die potentielle Energie der Feder lautet:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k\hat{x}^2(\omega)$$

Die Energie ist also proportional zu $\hat{x}^2(\omega)$. Sie hat ihr Maximum bei $\hat{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, also im Resonanzfall. Will man die Halbwertsbreite bestimmen ermittelt man die Schwingfrequenzen, bei denen die Schwingung nur noch die halbe Energie hat. Es muss gelten

$$\frac{1}{2}\hat{x}^2(\hat{\omega}) = \hat{x}^2(\omega_x)$$

$$\Rightarrow \frac{F^2}{m^2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_x^2)^2 + 4\delta^2\omega_x^2}} = \frac{F^2}{2m^2\sqrt{4\omega_0^2\delta^2 - 4\delta^4}}$$

$$\Rightarrow \omega_x^4 - 2\omega_0^2\omega_x^2 + 4\delta^2\omega_x^2 + \omega_0^4 = 8\omega_0^2\delta^2 - 8\delta^4$$

$$\Rightarrow \omega_x^4 + (4\delta^2 - 2\omega_0^2)\omega_x^2 + \omega_0^4 - 8\omega_0^2\delta^2 + 8\delta^4 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_x^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \pm 2\sqrt{\omega_0^2\delta^2 - \delta^4} = \omega_0^2 - 2\delta^2 \pm 2\delta\omega_0\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}$$

Nähert man $\delta^2 \to 0$ folgt

$$\omega_x^2 = \omega_0^2 \pm 2\delta\omega_0$$

$$\Rightarrow \omega_x = \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{2\delta}{\omega_0}}$$

Dies lässt sich nach Taylor entwickelt so schreiben:

$$\omega_x = \omega_0 \left(1 \pm \frac{\delta}{\omega_0} - \frac{\delta^2}{2\omega_0^2} \pm O\left(\frac{\delta^6}{\omega_0^6}\right) - ...\right)$$

Nähert man wiederum $\delta^2 \to 0$ folgt

$$\omega_x = \omega_0 \left(1 \pm \frac{\delta}{\omega_0}\right)$$

Dies ergibt die Lösungen

$$\omega_1 = \omega_0 + \delta$$

und

$$\omega_2 = \omega_0 - \delta$$

Es folgt nun

$$\triangle\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\delta$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\triangle\omega}{2}$$

Man kann also anhand der Halbwertsbreite den Dämpfungskoeffizienten δ ermitteln.

1.2 Übertragung der gedämpften Schwingungsgleichung auf das Drehpendel

Um aus der Differentialgleichung für normale gedämpfte Schwingungen

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

auf die Drehschwingung zu gelangen, muss man nur die Koeffizienten der Schwingung der Drehbewegung entsprechend angleichen:

- Die Masse m wird zum Trägheitsmoment I
- Die Kraft F wird zum Drehmoment M
- Die Auslenkung x wird zum Winkel β
- Die Geschwindigkeit v wird zur Winkelgeschwindigkeit ω
- Der Impuls p wird zum Drehimpuls L
- Die Federkonstante k wird zur Richtkonstante D

Nach dieser Substitution sieht die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung wie folgt aus:

$$I\ddot{\beta} + 2\delta I\dot{\beta} + D\beta = 0$$

2 Versuchsbeschreibung

2.1 Aufbau des Drehpendels

Das für das Experiment benutzte Drehpendel besteht aus einer dünnen Kupferringscheibe, die auf einer Achse nahezu reibungsfrei und drehbar gelagert ist. Diese Scheibe wird durch das Auslenken und Zusammenziehen einer Spiralfeder in Drehbewegungen versetzt. Am anderen Ende der Feder ist eine Art drehbarer Hebel befestigt, der über eine Schubstange und einen Exzenter an einen drehzahlvariablen Elektromotor befestigt ist. Durch diesen Motor wird die Feder und der skalierte Ring in Schwingbewegungen versetzt. Anhand der Skala lässt sich dann die Amplitude A ablesen. Die Dämpfung des Systems erfolgt durch eine Wirbelstrombremse. Durch Anlegen eines Erregerstromes I wird zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten laufende Scheibe abgebremst. Dieser Strom induziert ein Magnetfeld, das dem Elektromagneten entgegengesetzt ist. Somit wirkt die Drehscheibe wie ein ohmscher Verbraucher, was einen Energieverlust zur Folge hat. Dies fhrt zur Dämpfung des schwingenden Systems, da ein Teil der kinetischen Energie in Wärme umgewandelt wird. Falls nun der Erregerstrom I und somit die Magnetfeldstärke B konstant bleiben, gilt $\delta\tilde{v}$, da die für die Dämpfung mitverantwortliche Lorentzkraft auf die Teilchen $F = qvB$ proportional zur Geschwindigkeit ist.

2.2 Die freie, gedämpfte Schwingung in Luft

Die Schwingung der Scheibe wird zunächst nur durch Luftreibung gedämpft. Hierfür wird der Kupferring nach rechts und nach links jeweils gleich ausgelenkt und dann die Maximalamplituden abgelesen, sowie die Impulse im beobachteten Zeitraum gemessen und die Frequenz des Frequenzgenerators abgelesen.

2.3 Die freie, gedämpfte Schwingung mit Wirbelstrombremse

Nun wird ein Erregerstrom von 0.2 A an den Elektromagneten angelegt und wieder die Maximalamplitude rechts und links sowie die Zeit gemessen. Das gleiche wird nun mit einem Erregerstrom von 0.4 A wiederholt.

2.4 Die erzwungene Schwingung

Bei diesem Versuchsteil wird nun der Elektromotor eingeschaltet um den Kupferring in Schwingung zu versetzen. Nach der Einschwingungsphase wird wieder die Maximalamplitude sowie die Zeit und nun auch die Phase gemessen. Die Durchführung erfolgt bei einer Dämpfung von 0.2A in 0.5er Schritten von 1.0 bis 9.0 der Drehzahl. Der obige Versuch wird mit Vergrößerung des Erregerstromes auf 0.4 A wiederholt. Um die Eigenfrequenz des Systems herauszufinden, wird das System nochmal in Schwingung versetzt, jedoch wird diesmal die Drehzahl des Motors in 0,2er Schritten erhöht. Die Messung erfolt mit 0.2 A und 0.4 A.

3 Versuchsauswertung

3.1 Freie gedämpfte Schwingungen

3.1.1 Formeln zur Auswertung

$$V = \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

$$\delta = \frac{\Lambda}{T} \pm \left(\left| \frac{\triangle\Lambda}{T} \right| + \left| \frac{\Lambda \triangle T}{T^2} \right| \right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + 2\delta^2} \pm \left(\left| \frac{4\pi^2 \triangle T}{T^3 \sqrt{\left(\frac{2\pi}{t}\right)^2 + \delta^2}} \right| + \left| \frac{\delta \triangle \delta}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2}} \right| \right)$$

3.1.2 Luftgedämpfte Schwingung

Strom durch Wirbelstrombremse	0 A
Impulse pro Sekunde	989

A_L	V	λ	A_L	V	λ
16,8			18		
16,4	1,024390	0,024090	17,8	1,011236	0,011173
16,2	1,012345	0,012269	17,8	1,000000	0,000000
16,0	1,012500	0,012422	17,4	1,022989	0,022720
16,0	1,000000	0,000000	17,4	1,000000	0,000000
15,8	1,012658	0,012579	17,0	1,023529	0,023256
15,6	1,012820	0,012739	17,0	1,000000	0,000000
15,4	1,012987	0,018337	16,8	1,011904	0,011834

Arithmetisches Mittel und Standardabweichung für Λ:

$$\Lambda = 1,153 \cdot 10^{-2} \pm 8,464 \cdot 10^{-3}$$

Für die Periode T ergibt sich:

$$T = 1,962s \pm 4,4 \cdot 10^{-2}s$$

Dämpfung:

$$\delta = 5,876 \cdot 10^{-3} \pm 4,45 \cdot 10^{-3}$$

Daraus ergibt sich die Eigenfrequenz

$$\omega = 3,202s^{-1} \pm 0,014s^{-1}$$

3.1.3 Leichte Dämpfung

Strom durch Wirbelstrombremse	0,2 A
Impulse pro Sekunde	989

A_L	V	λ	A_L	V	λ
16,0			18		
14,4	1,110000	0,105360	16,0	1,125000	0,111730
13,0	1,107692	0,102280	15,0	1,066667	0,064540
12,0	1,083334	0,080040	13,8	1,086957	0,083380
11,0	1,090900	0,087000	12,2	1,131148	0,123230
10,2	1,078430	0,075500	11,0	1,109090	0,103540
9,0	1,133333	0,0125000	10,0	1,100000	0,093090
8,2	1,097560	0,093000	9,0	1,111112	0,105360
7,0	1,171429	0,158220	8,2	1,097560	0,093090

Arithmetisches Mittel und Standardabweichung für Λ:

$$\Lambda = 9,2955 \cdot 10^{-2} \pm 5,37 \cdot 10^{-2}$$

Für die Periode T ergibt sich:

$$T = 1,976s \pm 8,56 \cdot 10^{-3}s$$

Dämpfung:

$$\delta = 4,7 \cdot 10^{-2} \pm 2,7 \cdot 10^{-2}$$

Daraus ergibt sich die Eigenfrequenz

$$\omega = 3,18s^{-1} \pm 0,014s^{-1}$$

3.1.4 Starke Dämpfung

Strom durch Wirbelstrombremse	0,4 A
Impulse pro Sekunde	989

A_L	V	λ	A_L	V	λ
14,0			18		
10,0	1,400000	0,336470	12,8	1,406250	0,340920
7,0	1,428570	0,356670	8,8	1,454545	0,374690
5,0	1,400000	0,336470	6,0	1,466667	0,383000
3,4	1,470590	0,385670	4,2	1,428570	0,350650
2,4	1,416670	0,340920	3,0	1,400000	0,336470
1,8	1,333334	0,287600	2,0	1,500000	0,405470

Arithmetisches Mittel und Standardabweichung für Λ:

$$\Lambda = 0,3535 \pm 3,12 \cdot 10^{-2}$$

Für die Periode T ergibt sich:

$$T = 1,987s \pm 4,63 \cdot 10^{-2}s$$

Dämpfung:

$$\delta = 0,177 \pm 1,98 \cdot 10^{-2}$$

Daraus ergibt sich die Eigenfrequenz

$$\omega = 3,167s^{-1} \pm 0,075s^{-1}$$

3.2 Erzwungene Schwingungen

Bei der erzwungenen Schwingung wird der Dämpfungskoeffizient bestimmt, indem die Halbwertsbreite aus den Plots der Funktion des Amplitudenquadrates ausliest. Unsere Plots bilden nur die Amplitude ab, also bekommt liest man die Halbwertsbreite für den Wert $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ ab.

3.2.1 Schwache Dämpfung

Zuerst wird die Erregerfrequenz abgelesen, bei der die Amplitude ihren Maximalwert erreicht:

$$\omega_R = 3,2s^{-1}$$

Die Maximalamplitude bei dieser Frequenz beträgt

$$A_{max} = 15SE \pm 0,5SE$$

Daraus folgt an der Stelle $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ der Wert

$$A_{1/2} = 10,6SE \pm 0,5SE$$

Hierbei wurde der Ablesefehler verwendet. Nun berechnet man die beiden resultierenden Dämpfungskoeffizienten. Hierzu liest man aus dem Graphen die zu A_1 und A_2 gehörenden Kreisfrequenzen ab und berechnet den Koeffizienten nach der Formel

$$\delta = \frac{\triangle\omega}{2}$$

Es ergeben sich mit $\omega_{1,1} = 3,15s^{-1}, \omega_{1,2} = 3,25s^{-1}, \omega_{2,1} = 3,1s^{-1}$ und $\omega_{2,2} = 3,3s^{-1}$die Werte

$$\delta_1 = 0,05s^{-1}$$

und

$$\delta_2 = 0,1s^{-1}$$

Hieraus ergibt sich für den Dämpfungskoeffizienten mit Mittelwert und Standardabweichung

$$\delta = (0,075 \pm 0,035)s^{-1}$$

Für die Kreisfrequenz nehmen wir eine Messungenauigkeit von $\sigma_\omega = 0,1 s^{-1}$ an, mit dieser und der Standardabweichung des Dämpfungskoeffizienten σ_δ ergibt sich für den Gaussfehler der Eigenfrequenz

$$\triangle\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_R^2 \sigma_\omega^2 + 2\delta^2 \sigma_\delta^2}{\omega_R^2 + 2\delta^2}}$$

Es ergibt sich für die Eigenfrequenz:

$$\omega_0 = (3,20 \pm 0,10) s^{-1}$$

3.2.2 Starke Dämpfung

Hierbei ist die Vorgehensweise dieselbe wie bei der schwachen Dämpfung. Es folgen die Werte:

$$\omega_R = 3,15 s^{-1}$$

$$A_{max} = (4 \pm 0,5) SE$$

$$\Rightarrow A_1 = 3,3 SE, A_2 = 2,3 SE$$

$$\omega_{1,1} = 2,95 s^{-1}, \omega_{1,2} = 3,5 s^{-1}, \omega_{2,1} = 2,9 s^{-1}, \omega_{2,2} = 3,4 s^{-1}$$

Dies ergibt die Dämpfungen $\delta_1 = 0,18 s^{-1}$ und $\delta_2 = 0,25 s^{-1}$. Mittelwert und Standardabweichung liefern

$$\delta = (0,22 \pm 0,08) s^{-1}$$

und somit die Eigenfrequenz

$$\omega_0 = (3,17 \pm 0,10) s^{-1}$$

3.2.3 Schwebung

Das Pendel wird zu einer bestimmten Kreisfrequenz angeregt. Aus den Diagrammen liest man die zugehörige Schwebungsdauer T_s ab. Mit $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ und

$$\omega_s = \left| \frac{\omega_{err} - \omega_0}{2} \right|$$

folgt

$$\omega_0 = 0,5 \cdot \omega_s - \omega_{err}$$

3.2.4 Einschwingvorgang

Man kann den Einschwingvorgang näherungsweise mit dieser Gleichung beschreiben:

$$\alpha(t) = \alpha_0(1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t)$$

Fr $\omega = \omega_0$ gilt $sin(\omega t) = 1$ woraus folgt

$$\frac{\alpha(t)}{\alpha_0} = 1 - e^{-\delta t}$$

$$\Rightarrow e^{-\delta t} = 1 - \frac{\alpha(t)}{\alpha_0}$$

$$\Rightarrow -\delta t = ln\left[1 - \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \delta t = -ln\left[1 - \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\right)\right]$$

Zur Vereinfachung definieren wir

$$y := -ln\left(1 - \frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\right)$$

Oben eingesetzt folgt

$$y = \delta t$$

Hierbei handelt es sich um eine Ursprungsgerade mit der Steigung δ. Um ihn zu ermitteln bedient man sich der linearen Regression. Für den Ablesefehler bei den Amplituden verwenden wir wieder 0,5 SE. Der Fehler der Zeitmessung fällt gegenüber diesem nicht ins Gewicht. Deshalb wird t in der Formel für die lineare Regression als genau angenommen. Mit der Einsteinschen Summenkonvention folgt für die Steigung, hier also die Dämpfung:

$$\delta = \frac{[y \cdot t]}{[t^2]}$$

Summiert wird ber alle gemessenen Werte. Um das Fehlerintervall zu bestimmen muss zunächst eine Fehlerabschätzung für y gemacht werden. Der Gaussfehler hierfür lautet:

$$\sigma_y = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(t)}{\alpha_0}} \sqrt{\left(\frac{\triangle\delta}{\alpha_0}\right)^2 \left(+\frac{\triangle\alpha_0\alpha(t)}{\alpha_0^2}\right)^2}$$

Berechnet man den Gaussfehler für alle Amplituden $\alpha(t)$ ergibt sich als maximales Fehlerintervall von y

$$\sigma_y = \pm 0,26$$

Das Fehlerintervall für die lineare Regression ist

$$|\triangle\delta| = \frac{|\triangle y|}{\sqrt{[t^2]}}$$

Es ergibt sich nun für die Dämpfung folgender Wert:

$$\delta = (4,18 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} s^{-1}$$

4 Fehlerdiskussion

Bei diesem Experiment bieten sich etliche Fehlerquellen an:

- Die größte Fehlerquelle ist zweifelsohne das Ablesen der Amplitude, gerade bei hohen Kreisgeschwindigkeiten ist es schier unmöglich, die Amplitude auf ± 0,2 Skalaeinheiten zu messen.
- Auch die Lichtschranken können eine Ursache für Fehler sein. Bei kleinen Phasenunterschieden misst die Lichtschranke am Zeiger der Scheibe immer eine halbe Periodendauer zu viel, auch bei größeren Phasendifferenzen hat sie erhebliche Macken. Selbst nach erheblicher Einschwingzeit liefert sie immer noch unterschiedliche Phasendifferenzen.
- Eine weitere Fehlerquelle stellt der stufenlose Drehschalter des Elektromotors für die Drehzahl dar. Er besitzt erhebliches Spiel, das heisst rechtsherumdrehen bringt eine andere Drehzahl wie linksherumdrehen.
- Der Zeiger des Kupferringes steht nach jedem Durchlauf nicht auf der 0 sondern meistens auf der 1. Wird vergessen, ihn zurückzustellen, liefert auch das falsche Messergebnisse.
- Noch eine Fehlerquelle bildet die Näherung, dass die Wirbelstrombremse sowie der Luftwiderstand streng proportional zur Geschwindigkeit wären, was aber nicht genau stimmt.

Literatur

[1] Paul A. Tipler, Physik, Sektrum Verlag, 3. korrigierter Nachdruck 2000 der 1. Auflage 1994, S. 888

[2] Michael Buser, Anita Lamprecht, *Versuch Nr.3 Erzwungene Schwingungen mit dem Drehpendel*, Ulm, 27. April 2001, Universität Ulm

[3] Michael Rill, Rafael Lang, *Grundpraktikum der Physik 2000, Versuch 3: Freie und erzwungene Schwingungen mit dem Drehpendel*, Ulm, Universität Ulm

[4] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag, 3. Auflage 2003, S. 350ff.

[5] Georg Joos, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, AULA Verlag Wiesbaden, 15. Auflage