Versuch Nr. 3
Freie und erzwungene Schwingungen mit dem Drehpendel

Michael Buser   Anita Lamprecht

27. April 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlagen **2**
1.1 Linearen Schwingungen und Drehschwingungen 2
1.1.1 Lineare gedämpfte Schwingungen 2
1.2 Gedämpfte Drehschwingungen 5

2 Erzwungene Schwingungen **6**
2.1 Informationsgehalt der Resonanzkurve 9
2.2 Phasenverschiebung 10

3 Versuchsbeschreibung **10**

4 Versuchsauswertung **14**
4.1 Freie Schwingungen 14
4.1.1 Luftgedämpfte Schwingung 14
4.1.2 Schwache gedämpfte Schwingung 14
4.1.3 Starke gedämpfte Schwingung 15
4.2 Erzwungene Schwingung 15
4.2.1 Starke Dämpfung 15
4.2.2 Schwache Dämpfung 16
4.3 Einschwingvorgang (0,2 A) 16
4.4 Schwebung (0,2 A) 16

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Linearen Schwingungen und Drehschwingungen

1.1.1 Lineare gedämpfte Schwingungen

Ein Körper K schwingt harmonisch, wenn auf ihn nur eine Kraft wirkt, die der Auslenkung aus der Ruhelage proportional und ihrer Richtung entgegengesetzt ist. Es gilt dann $F = m\ddot{x} = -Dx$ also $\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$ und $x = a\sin\omega t + b\cos\omega t$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$. Hierbei bleibt die Energie erhalten und pendelt nur zwischen kinetischer und potentieller Energie hin und her. Allerdings hat man es in Wirklichkeit auch immer mit energieverzehrenden Reibungskräften zu tun. Ist die Reibung proportional zur Geschwindigkeit, so gilt $F = m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$, also

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0 \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung wird mit dem Ansatz $x = x_0 e^{\lambda t}$ gelöst. In (1) eingesetzt und zusammengefaßt folgt:

$$(m\lambda^2 + k\lambda + D)x_0 e^{\lambda t} = 0 \tag{2}$$

Hieraus folgt, daß das charakteristische Polynom $m\lambda^2 + k\lambda + D = 0$. Daraus erhält man für λ genau zwei Lösungen:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{k^2 - 4mD}$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden, in denen sich das System vollkommen unterschiedlich verhält. Zur Vereinfachung soll nun die Dämpfungskonstante $\delta = \frac{k}{2m}$ und die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ eingeführt werden.

Schwingfall $(k < 2\sqrt{mD})$

In diesem Fall, in dem der Radikand negativ ist, gilt: $\lambda_1 = -\delta + i\omega$ Für die Auslenkung x ergibt sich:

$$x = x_0 e^{-\delta t} e^{i\omega t} \tag{3}$$

Der Realteil von $Re(x) = x_0 e^{-\delta t}\cos\omega t$ macht den wirklichen Vorgang klar, eine Sinusschwingung einbeschrieben zwischen zwei abklingenden

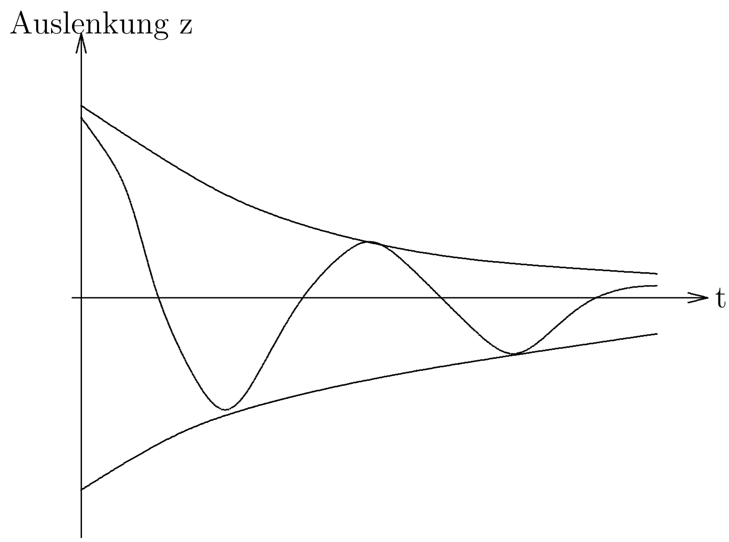

Abbildung 1: Schwingfall

e-Funktionen als Einhüllende. Es wird deutlich, dass die Kreisfrequenz nicht mehr den Wert einer ungedämpften Schwingung $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ besitzt, sondern um so mehr herabgesetzt ist, je stärker die Dämpfung wird. Es gilt für die neue Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Da eine solche Schwingung nicht zwangsläufig bei maximaler Auslenkung starten muß, sondern mit irgendeinem $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ starten kann, muß die allgemeine Lösung, wie immer bei Differentialgleichungen 2. Ordnung, zwei Konstanten enthalten, nicht nur x_0. Daher wird bei (3) noch eine Phasenverschiebung φ hinzugefügt und so ergibt sich schließlich:

$$x = x_0 e^{-\delta t} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad bzw. \quad Re x = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

Aperiodischer Grenzfall $(k = 2\sqrt{mD})$

In diesem Fall verschwindet die Wurzel in (3), dann ist auch $te^{-\delta t}$ eine Lösung:

$$x = x_0(1 + \delta t)e^{-\delta t}$$

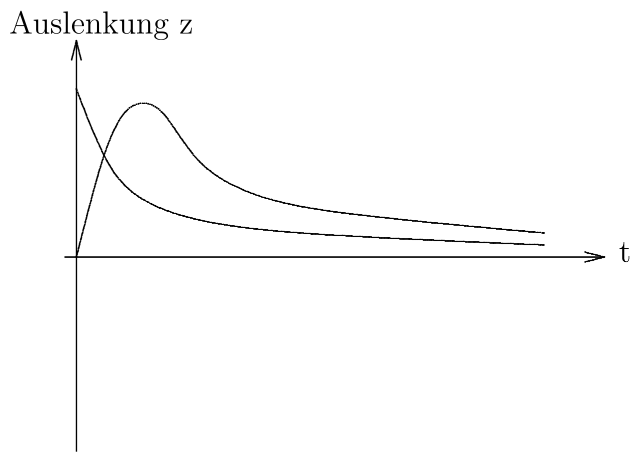

Abbildung 2: Aperiodischer Grenzfall

Der Schwinger kehrt von seiner Auslenkung auf einer Exponentialkurve schnell in die Nullage zurück.

Kriechfall $(k > 2\sqrt{mD})$

Hier wird nun die Wurzel in (3) reell und trägt somit selbst zur Dämpfung bei, es gilt somit:

$$x = x_0 e^{-\bar{\delta} t} \quad mit \quad \bar{\delta}_{1/2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Die allgemeine Lösung muß hierbei aus zwei Anteilen aufgebaut werden, einer mit $\bar{\delta}_1$, die andere mit $\bar{\delta}_2$.

Die Energie des Schwingers pendelt zwischen kinetischer und potentieller Form hin und her, wobei sie allmählich abnimmt. Das Verhältnis

$$Q = \frac{2\pi \text{Energie}}{\text{Energieverlust/Periode}}$$

heißt Gütefaktor und ist ein bequemes Maß für viele Eigenschaften des schwingenden Systems.

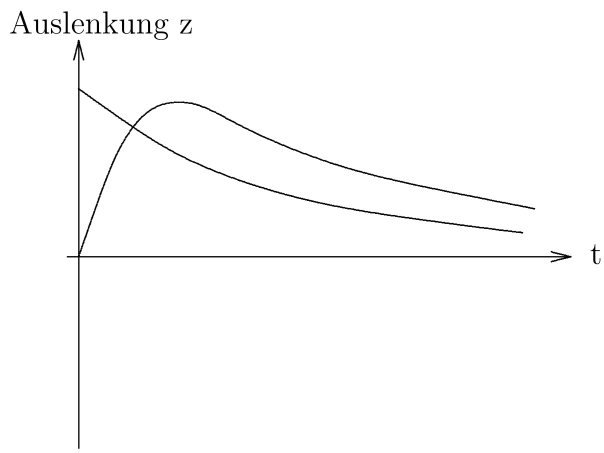

Abbildung 3: Kriechfall

1.2 Gedämpfte Drehschwingungen

Für freie Drehschwingungen lautet die Bewegungsgleichung analog zur Bewegungsgleichung für lineare Schwingugen:

$$I\ddot{\varphi} + k_D\dot{\varphi} + D_D\varphi = 0$$

mit φ : Ausschlagwinkel aus der Ruhelage, D_D : 'Richtmoment', I : Trägheitsmoment um die Drehachse und k_D : Reibungskonstante. Wird auf ein drehschwingungsfähiges System ein Drehmoment ausgeübt, so gilt:

$$I\ddot{\varphi} + k_D\dot{\varphi} + D_D\varphi = M$$

und es wird eine neue Variable $\varphi_D = \varphi - \frac{M}{D_D}$ eingeführt für die gilt:

$$I\ddot{\varphi_D} + k_D\dot{\varphi} + D_D\varphi_D = 0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung hat analog zu linearen Schwingungen im Schwingfall die Form :

$$\varphi_0 = \varphi_{D_0} e^{-\delta t} \cos\omega t \tag{5}$$

Springt die Meßgröße zur Zeit $t = 0$ von 0 auf einen gewissen Wert, so springt das Drehmoment auf das Meßsystem von 0 auf M und damit wird aus (5) mit $\varphi_0 = 0$:

$$\varphi = \frac{M}{D_D}(1 - e^{-\delta t}\cos\omega t)$$

Im aperiodischen Grenzfall $k_D^2 = 4D_D I$ gilt:

$$\varphi = \frac{M}{D_D}(1 - e^{-\frac{1}{2}\frac{k_D t}{I}}) = \frac{M}{D_D}(1 - e^{\frac{-2\pi t}{T}})$$

wobei T die Schwingungsdauer des ungedämpften Systems darstellt.

2 Erzwungene Schwingungen

Gegeben sei z.B. ein Drehpendel mit dem Trägheitsmoment I, der Federkonstante D und der Reibungskonstante k. Sich selbst überlassen würde das Drehpendel eine gedämpfte Schwingung mit der Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{D}{I} - \frac{k^2}{4m^2}}$ ausführen. Dieses System sei nun einem periodischen, harmonisch veränderlichen Drehmoment mit Kreisfrequenz ω ausgesetzt. Man stellt fest, dass das System nach einer gewissen Einschwingzeit mit der Frequenz ω_{Err} des äußeren Drehmomentes schwingt, nicht mit seiner Eigenfrequenz ω. Allerdings ist die Amplitude der Schwingung stark von der relativen Lage von Eigenfrequenz ω und erzwungener Frequenz ω_{Err} abhängig, die bei $\omega \approx \omega_{Err}$ (Resonanz) am größten ist. Darüberhinaus bemerkt man eine Phasendifferenz zwischen der Auslenkung des Systems und dem äußeren Drehmoment, die ebenfalls entschieden von der relativen Lage von ω und ω_{Err} abhängt. Die Bewegungsgleichung für ein solches System lautet:

$$M_A = M_{d'Al} + M_{Rü} + M_R \tag{6}$$

- Trägheitsmoment $M_{d'Al} = I\ddot{\varphi}$
- Reibungsmoment $M_R = k\dot{\varphi}$
- Rückstellmoment $M_{Rü=D\varphi}$
- äußeres Moment $M_A = M_0 \sin\omega t$ (M_0 : max. Moment, das vom Erreger aufgebracht wird)

allgemein gilt für das äußere Moment M_A:

$$M_A = D\varphi_{Err} \tag{7}$$

mit der Erregerauslenkung $\varphi_{Err} = A_{Err}\cos\omega_{Err}t$ (mit A_{Err}: durch den Erreger erzeugte Amplitude).

Für die Bewegungsgleichung gilt nun also:

$$I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + D\varphi - D\varphi_{Err} = 0 \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

und damit

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I}\dot{\varphi} + \frac{D}{I}\varphi = c\cos(\omega_{Err}t) \tag{10}$$

eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung einer solchen Gleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und dem partikulären Integral der inhomogenen Differentialgleichung zusammen:

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung für $\omega_0 > \delta$

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} + \frac{k}{I}\dot{\varphi} + \frac{D_a}{I}\varphi = 0 & \\
mit \quad \varphi &= A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \gamma) \\
\delta &= \frac{k}{2I} \\
\omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{D}{I} - \frac{k^2}{4I^2}}
\end{aligned}$$

Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$z = Ae^{i(\omega_{Err}t - \gamma)} \tag{11}$$

mit der reellen Amplitude A und γ als Phasenverschiebung zwischen Erreger und Oszillator. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man zusammengefaßt:

$$
\begin{aligned}
(\omega_0^2 - \omega_{Err}^2) + i\omega_{Err}\frac{k}{I} = \frac{c}{A}e^{i\gamma} \\
\Rightarrow Realteile: \quad \omega_0^2 - \omega_{Err}^2 &= \frac{c}{A}\cos\gamma \\
\Rightarrow Imagin\ddot{a}rteile: \quad \omega_{Err}\frac{k}{I} &= \frac{c}{A}\sin\gamma
\end{aligned}
$$

Daraus erhält man:

$$\tan\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\omega_{Err}k}{I(\omega_0^2 - \omega_{Err}^2)}$$

Aus $\sin\gamma^2 + \cos\gamma^2 = 1$ folgt für die Amplitude des Oszillators:

$$A = \frac{A_{Err}D}{\sqrt{I^2(\omega_0^2 - \omega_{Err}^2)^2 + k^2\omega_{Err}^2}} \tag{12}$$

Daraus ergibt sich dann die partikuläre Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung:

$$\varphi_{part} = A\cos(\omega_{Err}t - \gamma)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also:

$$\varphi = \underbrace{A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \gamma_0)}_{Einschwingverhalten} + \underbrace{A\cos(\omega_{Err}t + \gamma)}_{eingeschwungenerZustand}$$

Hieraus folgt, dass die Auslenung φ nach Ablauf der Einschwingzeit eine harmonische Zeitfunktion mit Kreisfrequenz ω_{Err} wird, allerdings nur mit einer Phasenverschiebung γ gegen das äußere Drehmoment. Für sehr kleine ω_{Err} wird das System vom äußeren Moment quasistatisch hin- und hergezerrt, ohne Rücksicht auf Trägheitsmoment und Reibung. Da die auftretenden Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in diesem Fall klein sind, sind auch die Trägheits- und Reibungseffekte klein. Das äußére Moment führt diesem System nur Leistung zu, wenn sich das Drehpendel in Richtung des Momentes bewegt, da das System jedoch genausoviel Energie wieder abgibt, ist die Gesamtleistungsaufnahme im quasistatische Fall Null.

Für sehr große ω überwiegt das Trägheitsglied in der Bewegungsgleichung. Hier spielen Reibung und Rückstellmoment keine Rolle, das System verhält sich quasifrei. Da sich Beschleunigung und Moment in Phase befinden, beträgt die Phasendifferenz $\gamma = \pi$. Auch hier gilt, wie im quasistatischen Fall, dass die Gesamtleistungsaufnahme Null ist.

Da der Wert der Phasenverschiebung von $\gamma = 0$ im quasistatischen auf $\gamma = \pi$ im quasifreien Zustand ansteigt, muß er irgendwann $\gamma = \frac{\pi}{2}$ passieren. An dieser Stelle nimmt dann das System ständig Leistung auf. Würde diese Energiezufuhr nicht durch Reibung verzehrt werden, würde die Amplitude des Systems in diesem Punkt bis ins Unendliche anschwellen.

Das System schwingt reibungsfrei, wenn das äußere Moment genau das Reibungsglied kompensiert. Dies ist nur möglich, wenn ω_{Err} und ω den gleichen Wert besitzen, nämlich $\sqrt{\frac{D}{m}}$, also an der Stelle, an der die Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ beträgt und die Amplitude maximal ist.

2.1 Informationsgehalt der Resonanzkurve

Durch Differentiation der Gleichung (12) findet man die Lage des Maximums der Resonanzkurve als Funktion der Dämpfung

$$\begin{aligned} \omega_{max} &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{k^2}{2I^2\omega_0^2}} \\ &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{aligned}$$

sowie die Höhe des Maximums an dieser Stelle

$$\varphi_{0,max} = \frac{cI}{k\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4I^2}}}$$

Das Verhältnis $\frac{\varphi_{0,max}}{\varphi(0)}$ wird Resonanzüberhöhung oder auch für $\frac{k}{I} \ll \omega_0$ bzw. $Q \gg 1$ Gütefaktor genannt. Demnach ist die Güteziffer oder der Gütefaktor ein Maß für die maximal mögliche Amplitude. Bei geringer

Dämpfung ist der Unterschied zwischen ω und ω_0 gering, daher schreibt man für $\frac{\varphi_{0,max}}{\varphi(0)}$ in guter Näherung $Q \approx \frac{\pi}{\Lambda}$, wobei Λ das logarithmische Dekrement genannt wird. Das logarithmische Dekrement ist definiert als

$$\Lambda = \frac{k}{2I}T = \frac{\pi k}{I\omega}$$

mit der Reibungskonstanten k der Schwingungsdauer T, dem Trägheitsmoment des Drehpendel I und der Kreisfrequenz ω. Weiterhin gilt:

$$\Lambda = \ln q \quad q = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}$$

Die Halbwertsbreite einer Resonanzkurve beschreibt das Frequenzintervall $\Delta\omega$ um ω_{max} herum, an dessen Rändern die Amplitude jeweils auf $\frac{\varphi_{0max}}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist. Sie berechnet sich durch

$$\varphi(t) = \frac{m_0}{\sqrt{(\omega_{Err}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_{Err}^2\delta^2}} \cos(\omega_{Err}t - \gamma)$$

und

$$\gamma = \arctan \frac{2\omega_{Err}\delta}{\omega_0^2 - \omega_{Err}^2}$$

was sich aus der mittleren übertragenen Leistung ergibt.

2.2 Phasenverschiebung

Die Phasendifferenz γ ist von der Erregerkreisfrequenz abhängig und steigt für ungedämpfte Schwingungen bei ω_{Res}, der Resonanzfrequenz sprunghaft auf π an. Je stärker der Dämpfung ist, desto mehr ähnelt der Kurvenverlauf einer Geraden.

3 Versuchsbeschreibung

Das Drehpendel besteht aus einem flachen Metallring mit dem Trägheitsmoment I bezüglich der Drehachse. Dieser Metallring ist auf der Drehachse drehbar und möglichst reibungsfrei gelagert. Darüber hinaus besitzt ein Drehpendel eine Spiralfeder, die einerseits am Metallring, andererseits an dem ebenfalls um die Drehachse drehbaren Hebel befestigt. Dieser Hebel kann durch eine Schubstange, die durch einen Elektromotor angeregt wird, in eine Schwingbewegung verrsetzt werden. Dadurch wird das innere Ende der Spiralfeder periodisch sinusförmig hin und her bewegt und damit durch die Spiralfeder auf den Metallring ein periodisches Drehmoment ausgeübt. Die Amplitude des Metallrings kann mit einem Zeiger an einer den Metallring umgebenden Skala abgelesen werden. Gebremst wird das System durch eine Wirbelstrombremse. Dazu läuft der Ring zwischen den Polschuhen des Elektromagneten, dessen Erregung durch den Spulenstrom eingestellt werden kann. Nur beim Eintritt in und beim Austritt aus dem Magnetfeld wird in jedem Kreisleiter ein Induktionsstrom erzeugt. Auf diesen übt das Magnetfeld eine bremsende Kraft aus, wodurch diese Dämpfungsvorrichtung fein einstellbar ist. Das von ihr erzeugte Drehmoment ist etwa proportional der Umfangsgeschwindigkeit des Kupferrings und damit etwa proportional der Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung.

Untersucht man nun die freie luftgedämpfte Schwingung und die Schwingung,die durch die Wirbelstrombremse eine Dämpfung erfährt(Strom: 2A und 4A), so mißt man um die Dämpfungskonstanten, Eigenfrequenzen und logarithmischen Dekremente zu bestimmen, die Schwingungsdauer und die Amplituden des jeweiligen Systems. Die logarithmischen Dekremente berechnen sich nun aus dem Logarithmus des Verhältnises aufeinanderfolgender Amplituden:

$$\Lambda = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}}$$

Aus der Definitionsgleichung des logarithmischen Dekrements $\Lambda = \delta T = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}}$ folgt somit die Dämpfungskonstante:

$$\delta = \frac{\Lambda}{T}$$

wobei sich die Schwingungsdauer wie folgt berechnet:

$$T = \frac{Anzahl \quad der \quad Impulse}{Impulse/s} s$$

Bei der Untersuchung der erzwungenen Schwingungen bei der Dämpfung mit den Strömen 0,2A und 0,4A durch die Wirbelstrombremse, werden jeweils Resonanzkurven aufgenommen, indem bei der jeweiligen Motoreinstellung die maximale Amplitude im eingeschwungenen Zustand abgelesen wird. Aus der Halbwertsbreite, also die Länge des Intervalls, in dem das Drehpendel mindestens die Hälfte seiner maximalen Energie besitzt, kann man nun ebenfalls die Dämpfung δ bestimmen. Mit $W = \int F ds$ ergibt sich zusammen mit der Leistung $P = W/t$ der Zusammenhang:

$$P = \frac{\int F ds}{t}$$

Integriert man nun über die Dauer einer Periode T und setzt die Terme der Schwingungsgleichung ein, erhält man:

$$P = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{-m_0 \omega M_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} \int_0^T \cos\omega t \sin(\omega t - \gamma) dt$$

mit
m_0 : Schwingende Masse
M_0 : max. Moment, das vom Erreger aufgebracht wird

Durch Benutzung des Ausdrucks $\sin(\omega t - \gamma) = \sin\omega t \cos\gamma - \cos\omega t \sin\gamma$ und durch ausintegrieren erhält man nun die Gleichung für die Leistung des Drehpendels

$$P = \frac{m_0 M_0 \omega \sin\gamma}{2\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} \tag{13}$$

Setzt man nun $\omega = \omega_0$ (Resonanz), so erhält man nun den Ausdruck der maximalen Leistung. Da $\gamma = \arctan\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \omega_0$ erhält man schliesslich:

$$P_{Max} = \frac{m_0 M_0}{4\delta} \tag{14}$$

Da für die Halbwertsbreite $P = P_{Max}$ gilt, folgt der Ansatz:

$$\frac{1}{2}\frac{m_0 M_0}{4\delta} = \frac{m_0 M_0 \omega^2 \delta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

Daraus ergibt sich nach Ausmultiplizieren und Lösen der quadratischen Gleichung für die Halbwertsbreite $\Delta\omega = 2\delta$:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\delta \tag{15}$$

Anschliessend wird nun der Einschwingvorgang bei einer Dämpfung mit 0,2A und den Anfangsbedingungen $\alpha(t=0) = 0 = \dot{\alpha}(t=0)$ mit α: Amplitude und t: Zeit, in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz untersucht. Nun werden im Resonanzfall erneut die Maximalamplituden gemessen und als Funktion der Zeit in einem Diagramm aufgetragen. Der Verlauf der entstandenen Kurve läßt sich aufgrund der Anfagsbedingungen und der schwachen Dämpfung näherungsweise wie folt beschreiben:

$$\alpha(t) = \alpha_0(1 - e^{-\delta t})\sin(\omega t)$$

daraus ergibt sich:

$$\delta = -\frac{1}{t}\ln\frac{\alpha_0 \sin(\omega t)}{a(t)}$$

Nach der obigen Diskussion des Einschwingvorgangs ist bei $t = \frac{1}{\delta}$ die Amplitude A auf $(1 - e^{-1})A$ angestiegen, d.h. $\varphi(\frac{1}{\delta}) = (1 - e^{-1})A \sin\frac{\omega}{\delta}$. Etwa 5% bis 20% von der Resonanzfrequenz entfernt stellt man ein ausgesprochenens Schwebungsverhalten der Maximalamplituden fest. Bei bekannter Erregerfrequenz lässt sich aus der Schwebungsfrequenz die Resonanzfrequenz des Systems ermitteln, da für $\omega = \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)$ unter den vorgegebenen Anfangsbedingungen und bei schwacher Dämpfung $(\delta \ll \omega_0)$ ω mit ω_0 gleichsetzt werden kann. Folgende Ausdrücke beschreibt dann näherungsweise die Einschwingvorgänge:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0(1 - e^{-\delta t})\sin(\omega t) \quad (\omega = \omega_0) && (16) \\ \alpha(t) &= \alpha(\cos(\omega t - \varphi) - e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t - \varphi)) && (17) \end{aligned}$$

4 Versuchsauswertung

4.1 Freie Schwingungen

4.1.1 Luftgedämpfte Schwingung

Für das nur durch Luft gedämpfte Drehpendel ergaben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned}
\frac{A_n}{A_{n+1}} &= 1,01055 \pm 0,01 \\
\Lambda &= \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = 0,01049 \pm 0,00990 \\
\delta &= \frac{\Lambda}{T} = 0,00551 \pm 0,0052 \frac{1}{s} \\
\omega &= \sqrt{(\frac{2\pi}{T})^2 + \delta^2} = 3,3007 \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

($\frac{A_n}{A_{n+1}}$ und T sind gemittelt)

4.1.2 Schwache gedämpfte Schwingung

Strom durch die Wirbelstrombremse: 0,2A

$$\begin{aligned}
\frac{A_n}{A_{n+1}} &= 1,14180 \pm 0,015 \\
\Lambda &= \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = 0,13261 \pm 0,01314 \\
\delta &= \frac{\Lambda}{T} = 0,06951 \pm 0,00692 \frac{1}{s} \\
\omega &= \sqrt{(\frac{2\pi}{T})^2 + \delta^2} = 3,2941 \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

4.1.3 Starke gedämpfte Schwingung

Strom durch die Wirbelstrombremse: 0,4A

$$\begin{aligned}
\frac{A_n}{A_{n+1}} &= 1,69330 \pm 0,035 \\
\Lambda &= \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = 0,52668 \pm 0,02067 \\
\delta &= \frac{\Lambda}{T} = 0,55622 \pm 0,01093 \frac{1}{s} \\
\omega &= \sqrt{(\frac{2\pi}{T})^2 + \delta^2} = 6,6588 \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

4.2 Erzwungene Schwingung

4.2.1 Starke Dämpfung

Aus dem Diagramm kann man leicht die Resonanzfrequenz ablesen. Sie beträgt:

$$\omega_R = 3,31 \frac{1}{s}$$

Die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ beträgt:

$$\Delta\omega = 0,51 \frac{1}{s}$$

Daraus erhält man für die Dämpfung:

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{2} = 0,26 \frac{1}{s}$$

Daraus läßt sich nun die Eigenfrequenz berechnen.

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2} = 3,33 \frac{1}{s}$$

4.2.2 Schwache Dämpfung

Analog wie bei der starken Dämpfung werden auch hier die Werte bestimmt.

$$\omega_R = 3,03\frac{1}{s}$$
$$\Delta\omega = 0,05\frac{1}{s}$$

Daraus erhält man

$$\delta = 0,025\frac{1}{s}$$
$$\omega_0 = 3,03\frac{1}{s}$$

4.3 Einschwingvorgang (0,2 A)

Bei diesem Versuch wurde die Erregungsfrequenz auf $\omega_{Err} = 3,29\frac{1}{s}$ eingestellt. Damit ergibt sich für die Periondendauer $T = 1,91s$. Aus dem Diagramm ist abzulesen, daß nach $7,7T$ die Amplitude $1 - \frac{1}{e}$ von der maximalen Amplitude beträgt. Für die Dämpfung erhält man somit:

$$\delta = \frac{1}{t} = \frac{1}{7,7T} = 0,068\frac{1}{s}$$

4.4 Schwebung (0,2 A)

Das Pendel wurde in diesem Versuch mit $\omega_{Err} = 3,14\frac{1}{s}$ erregt. Aus dem Diagramm liest man die Schwebungsdauer mit $T_S = 22,4s$ ab. Daraus ergibt sich die Schwebungsfrequenz

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T_S} = 0,28\frac{1}{s}$$

Aus $\omega_S = \left|\frac{\omega_{Err}-\omega_o}{2}\right|$ lässt sich nun die Eigenfrequenz berechnen:

$$\omega_0 = 2\omega_S + \omega_{Err} = 3,70\frac{1}{s}$$

Literatur

[1] W. Walcher. *Praktikum der Physik.* Teubner Studienbücher Physik, 1994.

[2] Bergmann, Schäfer. *Lehrbuch der Experimentalphysik - Mechanik, Relativität, Wärme - Band 1.* Walter de Gruyter, 11. Auflage

[3] Christian Gerthsen. *Physik.* Springer - Lehrbuch, 1993

[4] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik.* Fachbuchverlag Leipzig 1996, 16. Auflage

[5] H. Breuer. *DTV - Atlas zur Physik Band 1, Band 2* Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG. München 1994, 4. Auflage