



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
1.1	Die Schwingungsgleichung der harmonischen Schwingung . . . . .	2
1.2	Näherung: $\sin \alpha \approx \alpha$ . . . . .	3
1.3	Federpendel . . . . .	4
1.4	Das mathematische Pendel . . . . .	5
1.5	Physikalisches Pendel . . . . .	6
1.6	Gekoppelte Pendel . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Experiment</b>	<b>12</b>
2.1	Bestimmung der Federkonstante . . . . .	12
2.2	Versuchsaufbau und Bestimmung der Trägheitsmomente . . . . .	12
2.3	Bestimmung von Schwingungsdauern der Normalschwingungen . . . . .	14
2.4	Schwebung . . . . .	16
2.5	Kopplungsgrade . . . . .	17

# 1 Theorie

Siehe dazu [1]. Eine sich im Laufe der Zeit periodisch wiederholende Bewegungsform nennt man freie Schwingung, wenn auf das schwingende System keine äußere Kraft wirkt. Hat die Ortskurve  $r(t)$  eines bestimmten schwingenden Teilchens einen sinusförmigen Verlauf, so liegt eine spezielle Form der freien Schwingung vor, die sogenannte freie harmonische Schwingung. Wirkt eine äußere Kraft auf das schwingende System, welche die Schwingung dämpft, so spricht man von einer gedämpften Schwingung.

## 1.1 Die Schwingungsgleichung der harmonischen Schwingung

**Definition:** Ein System zur Erzeugung einer harmonischen Schwingung wird als harmonischer Oszillator bezeichnet. Dabei wird ein Gegenstand aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt, und es wirkt eine rücktreibende Kraft auf ihn. Bei hinreichend kleinen Auslenkungen ist die Kraft proportional zur Auslenkung. Ein gutes Beispiel liefert ein an einer Feder befestigter Körper. Für die rücktreibende Kraft gilt das Hookesche Gesetz:

$$F = -kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (2)$$

Bei einer harmonischen Schwingung ist die Beschleunigung proportional zur Auslenkung und dieser entgegengesetzt. Mit Hilfe dieser Eigenschaft lässt sich bestimmen, ob ein Körper harmonisch schwingt. Die Größe  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  wird als Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bezeichnet. Für die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung gilt:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3)$$

Eine mögliche Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (4)$$

$x(t)$  beschreibt die momentane Position des schwingenden Körpers, die als Auslenkung oder Elongation bezeichnet wird. Die maximale Elongation wird Amplitude  $A$  genannt. Der Phasenwinkel  $\delta$  gibt die Lage des Nulldurchgangs der Auslenkung relativ zum Zeitnullpunkt an. Die Kreisfrequenz  $\omega$  kann auch noch auf folgende Weise geschrieben werden:

$$\omega = 2\pi\nu \quad (5)$$

Die Zeit für eine vollständige Schwingung eines Körpers wird als Schwingungsdauer oder Periode bezeichnet. Die Frequenz  $\nu$  ist der Kehrwert der Periodendauer  $T$ :

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (6)$$

Nach Ableiten der Gleichung (4) erhält man die Geschwindigkeitsfunktion  $v(t)$ :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta) \quad (7)$$

Die Geschwindigkeit und die Auslenkung sind um  $\frac{\pi}{2}$  phasenverschoben. Durch nochmaliges Differenzieren erhält man die  $a(t)$  - Funktion:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t) \quad (8)$$

**Energiebilanz bei der harmonischen Schwingung:** Bei einem harmonisch schwingenden Körper wandeln sich potentielle und kinetische Energie ständig ineinander um. Die potentielle Energie bei der Auslenkung  $x(t)$  beträgt

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2(t). \quad (9)$$

Die kinetische Energie beträgt, wenn der Gegenstand die Geschwindigkeit  $v(t)$  besitzt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2(t). \quad (10)$$

Die Gesamtenergie ist konstant und beträgt:

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} k x^2(t) + \frac{1}{2} m v^2(t) \quad (11)$$

## 1.2 Näherung: $\sin \alpha \approx \alpha$

Im Folgenden werden wir häufig die Näherung  $\sin \alpha \approx \alpha$  für kleine Winkel (rad) benutzen. Die Gültigkeit dieser Näherung lässt sich durch eine Taylorentwicklung von  $\sin \alpha$  an der Stelle 0 zeigen:

$$F(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \quad (12)$$

mit  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$  und  $x = \alpha$ :

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \frac{1}{120} \alpha^5 + Rest(\alpha^6) \quad (13)$$

Hier sieht man nun, dass für kleine Winkel die Werte ab  $\alpha^3$  so klein werden, dass sie kaum ins Gewicht fallen.

### 1.3 Federpendel



Federpendel

Ein Gegenstand befindet sich an einer vertikal aufgehängten Feder, die dadurch um die Strecke  $x_0$  aus ihrer Ruhelage gedehnt wird. Die Feder wird zusätzlich um eine Strecke  $x$  ausgelenkt. An dem Körper greifen die nach oben gerichtete Federkraft

$$F_F = -k(x_0 + x) \quad (14)$$

und die nach unten gerichtete Gewichtskraft

$$F_G = mg \quad (15)$$

an. Das zweite Newtonsche Gesetz liefert folgende Bewegungsgleichung:

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x_0 + x) + mg \quad (16)$$

Für die Gleichgewichtslage des Körpers gilt:

$$mg = kx_0 \quad (17)$$

Kombiniert man Gleichung (14) und (15), so erhält man die Schwingungsdifferentialgleichung des Federpendels:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (19)$$

Die Gewichtskraft bewirkt also nur eine Verschiebung der Ruhelage nach  $x_0$ . Die Lösung dieser Differentialgleichung ist natürlich eine harmonische Schwingung mit  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

## 1.4 Das mathematische Pendel



Mathematisches Pendel

Im Vergleich zum Federpendel, bei dem sich die Schwingungsbewegung eindimensional beschreiben ließ, handelt es sich beim mathematischen Pendel um eine Bewegung in zwei Raumrichtungen, die sich jedoch recht oft auf eine einzige Winkelkoordinate reduzieren lässt.

Beim mathematischen Pendel geht man davon aus, dass eine Punktmasse  $m$  an einem masselosen Faden der Länge  $L$  aufgehängt ist. Wenn man die Masse  $m$  um einen Winkel  $\alpha$  aus ihrer Ruhelage auslenkt, wird sie zur Ruhelage zurückkehren, aber aufgrund ihrer Trägheit über sie hinaus schwingen und eine periodische Bewegung ausführen. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die rücktreibende Kraft durch

$$F_R = -mg \sin \alpha \quad (20)$$

gegeben ist. Nach den Newtonschen Axiomen und den Grundprinzipien der Rotationsbewegung gilt:

$$F = ma = m \frac{d^2 s}{dt^2} = mL \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \quad (21)$$

Setzt man Gleichung (19) und (20) gleich, so erhält man

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0 \quad (22)$$

Diese Gleichung stellt eine nicht lineare Differentialgleichung dar, die jedoch mit Hilfe der Näherung  $\sin \alpha \approx \alpha$  vereinfacht werden kann:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0 \quad (23)$$

Die Lösung lässt sich allgemein angeben mit:

$$\alpha = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (24)$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  beträgt

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (25)$$

und die Periodendauer ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (26)$$

## 1.5 Physikalisches Pendel



Physikalisches Pendel

Unter einem physikalische Pendel versteht man einen starrer Körper, dessen Drehachse außerhalb des Schwerpunktes liegt. Der Schwerpunkt mit dem Abstand  $l$  vom Aufhängepunkt vollführt somit eine Schwingung, für welche das Drehmoment

$$M = l \times F \quad (27)$$

der Auslenkung entgegenwirkt. Somit gilt für das rücktreibende Drehmoment:

$$M = -mgl \sin \varphi \quad (28)$$

Für kleine Auslenkungen lässt sich nun die Näherung  $\sin \varphi \approx \varphi$  anwenden:

$$M = -mgl\varphi \quad (29)$$

ebenso gilt für das Drehmoment folgende Gleichung

$$M = I\alpha = I\ddot{\varphi} \quad (30)$$

Die beiden Gleichungen (28) und (29) ergeben:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi \quad (31)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \quad (32)$$

Damit ist diesmal

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (33)$$

und

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (34)$$

## 1.6 Gekoppelte Pendel

**Herleitung und Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung** Wirken zwischen zwei schwingungsfähigen Systemen Kräfte, die von der Auslenkung des Systems abhängen, dann nennt man sie gekoppelte Systeme. Ein Beispiel hierfür sind zwei durch eine Feder gekoppelte Schwerependel.



Gekoppeltes Pendel



Beide Schwerependel werden durch das Anhängen der Kopplungsfeder um einen Winkel  $\varphi$  aus der vertikalen Lage ausgelenkt. Da beide Pendel sich in Ruhe befinden, muss ein Gleichgewicht der Drehmomente herrschen.

Wir wählen dazu das Koordinatensystem so, daß die  $x_1$ -Achse nach unten und die  $x_2$ -Achse nach rechts zeigen. Dann gilt für das von der Kopplungsfeder verursachte Drehmoment

$$\vec{M}_F = \vec{l} \times \vec{F} \quad (35)$$

$$= \begin{pmatrix} l \cos \varphi \\ l \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times k \begin{pmatrix} 0 \\ l \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kl^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kl^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (36)$$

Die Gravitationskraft  $|\vec{G}| = mg$  bewirkt ein Drehmoment

$$\vec{M}_R = \vec{L} \times \vec{F}_R \quad (37)$$

$$= \begin{pmatrix} L \cos \varphi \\ L \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mg \sin \varphi \sin \varphi \\ -mg \sin \varphi \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Lmg \cos^2 \varphi \sin \varphi - Lmg \sin^3 \varphi \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Lmg \varphi \end{pmatrix} \quad (38)$$

Aufgrund des erwähnten Gleichgewichts ist also

$$\vec{M}_F = \vec{M}_G \quad (39)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kl^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Lmg \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow kl^2 \varphi = -lmg \varphi \quad (40)$$

Nun lenkt man das linke Pendel um den Winkel  $\varphi$  und das rechte Pendel um den Winkel  $\varphi$  aus. Auf das rechte Pendel wirkt nun ein durch die Gewichtskraft hervorgerufene Drehmoment:

$$M_{2,G} = -mgL(\varphi - \varphi) \quad (41)$$

Und das durch die Kopplungsfeder verursachte Drehmoment

$$M_{2,F} = -kl^2(\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi) \quad (42)$$

Da das resultierende Drehmoment gleich der Summe aller angreifenden Drehmomente ist, gilt folgende Drehmomentbeziehung:

$$M_2 = -mgL(\varphi_2 - \varphi) - kl^2(\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi) \quad (43)$$

Verknüpft man nun diese Gleichung mit der Gleichgewichtsbedingung (??), ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$M_2 = -mgL(\varphi_2) - kl^2(\varphi_2 - \varphi) \quad (44)$$

Für  $M = I\ddot{\varphi}$  kann die Gleichung folgendermaßen geschrieben werden:

$$I\ddot{\varphi}_2 + mgL\varphi_2 + kl^2(\varphi_2 - \varphi) = 0 \quad (45)$$

Für das linke Pendel gilt analog:

$$I\ddot{\varphi}_1 + mgL\varphi_1 + kl^2(\varphi_1 - \varphi) = 0 \quad (46)$$

Addiert bzw. Subtrahiert man die Gleichung für das linke Pendel und die Gleichung des rechten Pendels, so ergibt sich mit Hilfe der Substitutionen  $\Psi = (\varphi_1 + \varphi_2)$  und  $\Phi = (\varphi_1 - \varphi_2)$  folgende Differentialgleichungen:

$$\ddot{\Psi} + \frac{mgL}{I}\Psi = 0 \quad (47)$$

$$\ddot{\Phi} + \frac{mgL + 2kl^2}{I}\Phi = 0 \quad (48)$$

Beide Gleichungen haben die charakteristische Form einer harmonischen Schwingung. Die Kreisfrequenz können daher folgendermaßen berechnet werden:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \quad (49)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgL + 2kl^2}{I}} \quad (50)$$

Für ihre Schwingungsgleichungen gilt:

$$\Psi(t) = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t \quad (51)$$

$$\Phi(t) = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t \quad (52)$$

Durch Rücksubstitution erhält man die Gleichungen der beiden entkoppelten Pendel:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \quad (53)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \quad (54)$$

**Schwingungsmoden** Im folgenden wird davon ausgegangen, dass die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind, d.h.  $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varrho}(0) = 0$ . Der Grund dafür ist, dass diese Geschwindigkeiten nur schwer messtechnisch zu ermitteln sind. Außerdem wäre es nahezu unmöglich, einen vollständig reproduzierbaren Versuchsablauf zu gewährleisten.

Setzt man nun diese Anfangsbedingungen in die Gleichungen (49) und (50), so folgt, dass  $B_1 = B_2 = 0$ .

- **Gleichsinnige Schwingung:** Lenkt man beide Pendel um den selben Winkel in gleiche Richtung aus und lässt sie gleichzeitig zum Zeitpunkt  $t = 0$  los, so schwingen beide gleichphasig. Mathematisch formuliert lauten die Anfangsbedingungen:

$$\varphi(0) = \varrho(0) = \hat{\varphi} \quad (55)$$

Aus den Gleichungen (47) und (48) folgt:

$$A_1 + A_2 = 2\hat{\varphi} \quad (56)$$

$$A_1 - A_2 = 2\hat{\varphi} \quad (57)$$

$$\Rightarrow A_1 = 2\hat{\varphi} \quad (58)$$

Es ergibt sich also folgende Form der Schwingungsgleichung:

$$\varphi(t) = \varrho(t) = \hat{\varphi} \cos \omega t \quad (59)$$

Die Feder wird während der Schwingung nicht beansprucht.

- **Gegensinnige Schwingung:** Lenkt man beide Pendel um den gleichen Winkel in entgegengesetzter Richtung aus und lässt sie gleichzeitig zum Zeitpunkt  $t = 0$  los, so schwingen beide gegenphasig. Mathematisch formuliert lauten die Anfangsbedingungen:

$$\varphi(0) = -\varrho(0) = \hat{\varphi} \quad (60)$$

Aus den Gleichungen (49) und (50) folgt:

$$A_1 + A_2 = 2\hat{\varphi} \quad (61)$$

$$-A_1 + A_2 = 2\hat{\varphi} \quad (62)$$

$$\Rightarrow A_2 = 2\hat{\varphi} \quad (63)$$

Es ergeben sich diesmal folgende Schwingungsgleichungen:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos \omega t \quad (64)$$

$$\varrho(t) = -\hat{\varphi} \cos \omega t \quad (65)$$

**Schwebungen** Ein Pendel wird zum Herstellen des Schwebungsfalles ausgelenkt, während das andere Pendel in der Ruhelage festgehalten wird. Lässt man nun beide Pendel zum Zeitpunkt  $t = 0$  frei schwingen, so stellt sich der Schwebungsfall ein. Auch hier gilt, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null sei. Daher folgt wie in (1.6)  $B_1 = B_2$ . Anfangsbedingungen:

$$\varphi(0) = \hat{\varphi} \quad (66)$$

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \quad (67)$$

Für diese Anfangsbedingungen ergeben sich die Gleichungen (49) und (50) zu:

$$A_1 + A_2 = 2\hat{\varphi} \quad (68)$$

$$A_1 - A_2 = 0 \quad (69)$$

$$\Rightarrow A_1 = A_2 = \hat{\varphi} \quad (70)$$

Für das Pendel 1 ergibt sich mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme die Schwingungsgleichung:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\hat{\varphi} \cos \omega_1 t + \hat{\varphi} \cos \omega_2 t) \quad (71)$$

$$= \hat{\varphi} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \quad (72)$$

Für das Pendel 2 folgt auf analoge Weise:

$$\vartheta = \frac{1}{2}(\hat{\varphi} \cos \omega_1 t + \hat{\varphi} \cos \omega_2 t) \quad (73)$$

$$= \hat{\varphi} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \quad (74)$$

An den Gleichungen ist zu erkennen, dass  $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$  die Frequenz der langsam veränderlichen Amplitudenfunktion ist, während  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  die Frequenz der schnellen amplitudenmodulierten Oszillation darstellt. Man erkennt außerdem deutlich, dass die beiden Pendelschwingungen um  $\frac{\pi}{2}$  gegeneinander phasenverschoben sind. Die Energie wandert zwischen den Pendeln periodisch hin und her.

## 2 Experiment

### 2.1 Bestimmung der Federkonstante

Zur Bestimmung der Federkonstante der Kopplungsfeder wird diese vertikal an einer Halterung aufgehängt. Man belastet die als masselos angesehene Feder mit einem bestimmten Gewicht, welches die Feder aus der Ruhelage bis zur Gleichgewichtslage dehnt. Die Feder wird anschließend ausgelenkt und vollführt eine harmonische Schwingung um ihre Gleichgewichtslage. Man misst dabei die Periodendauer der Schwingung und kann anschließend über die Formel

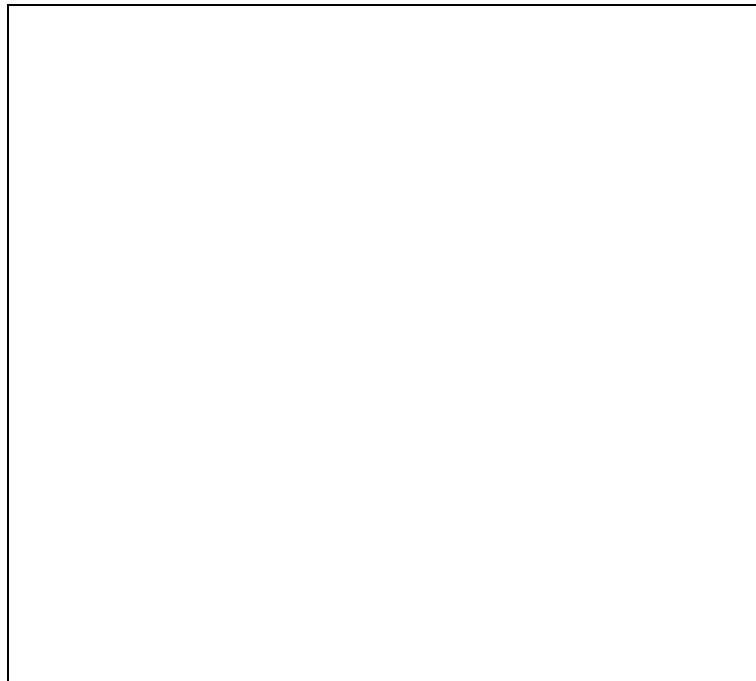
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (75)$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \quad (76)$$

die Federkonstante bestimmen.

Mit den gemessenen Werten (siehe Datenblatt A) ergibt sich die Federkonstante der von uns verwendeten Feder zu  $k = 2,3\frac{N}{m} \pm 0,3\frac{N}{m}$ . Der Fehler wird mit der Gauß-Formel ermittelt.

### 2.2 Versuchsaufbau und Bestimmung der Trägheitsmomente



Gekoppelte Pendel in Ruhe. Die leichte Neigung der Pendel nach innen (Gleichgewichtslage) ist kaum sichtbar.

Zu Beginn des Versuches muss man die beiden Pendel ohne Kopplungsfeder so ju-

stieren, dass sie mit der selben Periodendauer schwingen. Dazu variiert man die beiden Massen am Ende des Stabes etwas. Dies ist besonders wichtig, weil man für den späteren Versuch zwei identische Pendel benötigt. Anschließend misst man mehrmals die Schwingungsdauer der ungekoppelten Pendel, um später das Trägheitsmoment berechnen zu können.

Danach werden die beiden Pendel durch die Kopplungsfeder aus 2.1 miteinander verbunden.

$l$  ist der Abstand zwischen Kopplungshaken und Drehpunkt,  $L$  ist der Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Pendels und seinem Drehpunkt.

Der Versuch wird mit zwei verschiedenen Kopplungslängen und zwei verschiedenen Gewichten durchgeführt.

Die Trägheitsmomente der beiden Pendel werden sowohl über die Geometrie der Pendel als auch aus den Schwingungsdauern bestimmt; siehe dazu Datenblatt B.

**Geometrische Bestimmung** Das Trägheitsmoment der Pendel setzt sich aus dem eines Stabes und dem eines Hohlzylinders zusammen:

$$\begin{aligned}
 I &= I_{Stab}^{Mittelpunktachse} + I_{Stab}^{Steiner} + I_{Gewicht}^{Mittelpunkt} + I_{Gewicht}^{Steiner} \\
 &= \frac{m_{Stab}}{12}(3l_{Stab}^2 + l_{Stab}^2) + m_{Stab} \left( \frac{l_{Stab}}{2} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{m_{Hohlzylinder}}{4} \left( R_{aussen}^2 + R_{innen}^2 + \frac{1}{3} l_{Hohlzylinder}^2 \right) \quad (77)
 \end{aligned}$$

$$+ m_{Hohlzylinder} \left( l_{Stab} - \frac{1}{2} l_{Hohlzylinder} \right)^2 \quad (78)$$

Für die Herleitung dieser Trägheitsmomente und dem Steinerschen Satz siehe z.B. [3] oder auch [4].

Mit den in Datenblatt B angegebenen Werten ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
 I_{links,klein}^{geometrisch} &= 0,0829kgm^2 \pm 0,0003kgm^2 \\
 I_{rechts,klein}^{geometrisch} &= 0,0829kgm^2 \pm 0,0003kgm^2 \\
 I_{links,groß}^{geometrisch} &= 0,1475kgm^2 \pm 0,0006kgm^2 \\
 I_{rechts,groß}^{geometrisch} &= 0,1475kgm^2 \pm 0,0003kgm^2
 \end{aligned}$$

Auf die Darstellung der Gauß-Fehlerformel wird hier aus wohl verständlichen Gründen verzichtet.

**Dynamische Bestimmung** Für die Schwingungsdauer eines ungekoppelten Pendels gilt Gleichung (34), woraus die Auswerteformel

$$I = \frac{I^2 mg L}{4\pi^2} \quad (79)$$

folgt. Mit den auf Datenblatt B angegebenen Werten ergeben sich die Trägheitsmomente (jeweils rechts/links und für große bzw. kleine Massen):

$$I_{links,klein}^{dynamisch} = 0,085kgm^2 \pm 0,01kgm^2$$

$$\begin{aligned} I_{rechts,klein}^{dynamisch} &= 0,085kgm^2 \pm 0,02kgm^2 \\ I_{links,gro\beta}^{dynamisch} &= 0,148kgm^2 \pm 0,02kgm^2 \\ I_{rechts,gro\beta}^{dynamisch} &= 0,148kgm^2 \pm 0,02kgm^2 \end{aligned}$$

Dabei wird der Fehler wieder nach der Gauß-Formel ermittelt.

**Die Entscheidung** Der ermittelte Gauß-Fehler der geometrischen Bestimmung der Trägheitsmomente ist sehr klein. Trotzdem verwenden wir für die weiteren Rechnungen die dynamisch bestimmten Trägheitsmomente. Bei der geometrischen Bestimmung werden nämlich die Haken am Stab vernachlässigt, die Schwingung wird als ungedämpft angenommen und die Geometrie des Stabes am Aufhängepunkt fließt nicht in die Rechnung ein. Deshalb scheint uns der dynamisch ermittelte Wert trotz größerem Fehler zuverlässiger, da der systematische Fehler der geometrischen Methode nicht abgeschätzt werden kann. Der Vergleich beider Werte bestätigt aber beide Methoden, die verwendeten Näherungen sind durchaus berechtigt.

## 2.3 Bestimmung von Schwingungsdauern der Normalschwingungen

### Gleichsinnige Schwingung



Gleichsinnige Schwingung des gekoppelten Pendels

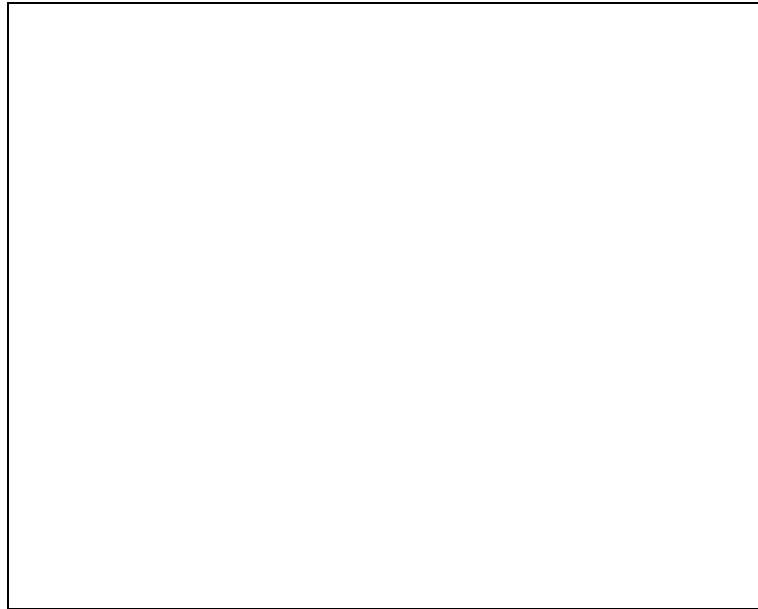
Die nun gekoppelten Pendel werden zunächst beide in die selbe Richtung ausgelenkt und gleichzeitig losgelassen. Sie schwingen dann gleichsinnig, d.h. es gilt für die Auslenkungen der beiden Pendel  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t$ . Man misst dabei die Periodendauer der Schwingung  $T_0$ , die gleich der Periodendauer eines einzelnen ungekoppelten Pendels sein sollte, da die Feder nicht belastet wird.

Nach Datenblatt C und der Formel (34) ergeben sich die Schwingungsdauern zu

$$\begin{aligned}T_{leicht}(l = 20cm) &= 1,38s \pm 0,01s \\T_{schwer}(l = 20cm) &= 1,383s \pm 0,008s \\T_{schwer}(l = 40cm) &= 1,377s \pm 0,006s\end{aligned}$$

Die mit oben bestimmten Trägheitsmomenten berechneten Schwingungsdauern betragen  $T_{leicht} = 1,40s$  bzw.  $T_{schwer,40cm} = 1,38s$ ,  $T_{schwer,20cm} = 1,38s$  und liegen damit voll im grünen Bereich. Die Abweichungen sind gering, was ja auch nach der Formel für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels (26) nicht anders zu erwarten ist. Ebenfalls wie erwartet unterscheiden sich die Schwingungsdauern der unterschiedlich gekoppelten Pendel bei gleichsinniger Schwingung im Rahmen der Messgenauigkeit nicht.

### Gegensinnige Schwingung



Gegensinnige Schwingung des gekoppelten Pendels

Nun lenkt man beide Pendel in verschiedene Richtungen mit der selben Amplitude aus (d.h.  $\vec{\varphi} = -\vec{\varphi}$ ) und misst die Periodendauer  $T_1$  der gegensinnigen Schwingung. Die Feder erfährt bei diesem Schwingungsmodus die maximal mögliche Belastung.

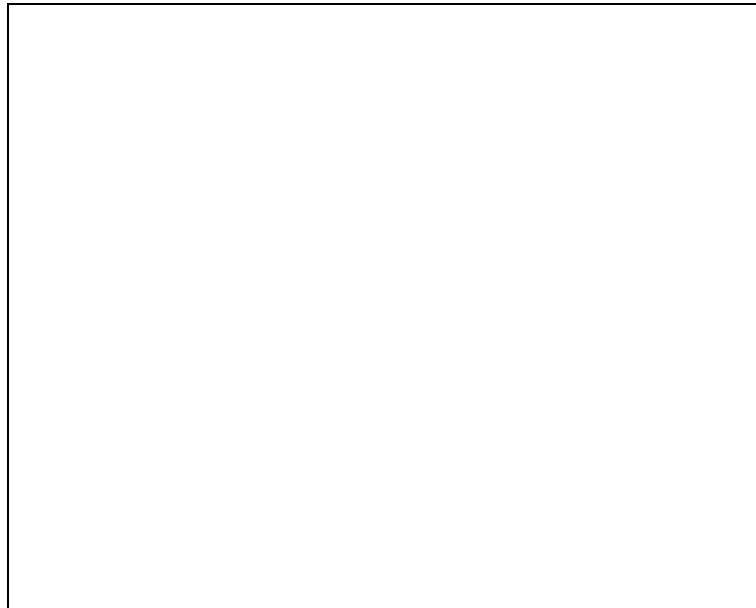
Nach Datenblatt D ergeben sich die Schwingungsdauern zu

$$\begin{aligned}T_{leicht}(l = 20cm) &= 1,330s \pm 0,007s \\T_{schwer}(l = 20cm) &= 1,346s \pm 0,008s \\T_{schwer}(l = 40cm) &= 1,255s \pm 0,007s\end{aligned}$$

Berechnet man die Periodendauern nach Formel (5), (6) und (50), so ergibt sich  $T_{leicht} = 1,331s$  (da haben wir mit unseren Messungen voll ins Schwarze getroffen) bzw.  $T_{schwer}(l = 40cm) = 1,240s$  (leicht daneben),  $T_{schwer}(l = 20cm) = 1,341s$ .



## 2.4 Schwebung



Schwebung des gekoppelten Pendels

In diesem Versuch wird eines der Pendel um eine definierte Amplitude aus der Ruhelage ausgelenkt, während das andere Pendel festgehalten wird. Lässt man nun beide Pendel los, so stellt sich nach einer kurzen Einschwingphase eine Schwebung ein. Man misst die Zeit  $T_3 = 2T_S$ , wobei  $T_S$  die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels ist.  $T_S$  nennt man Schwebungsdauer. Hierbei muss man, wie bei allen vorigen Versuchen auch, darauf achten, dass die Amplitude nicht zu groß wird, damit die Kleinwinkelnäherung nicht verletzt wird.

Nach Datenblatt E ergeben sich die gemessenen amplitudenmodulierten Oszillationsdauern zu

$$\begin{aligned}T_{leicht}(l = 20cm) &= 1,35s \pm 0,1s \\T_{schwer}(l = 20cm) &= 1,35s \pm 1,1s \\T_{schwer}(l = 40cm) &= 1,28s \pm 0,1s\end{aligned}$$

und die Schwebungsdauern zu

$$\begin{aligned}T_{leicht}(l = 20cm) &= 56,7s \pm 0,1s \\T_{schwer}(l = 20cm) &= 101,8s \pm 0,5s \\T_{schwer}(l = 40cm) &= 27,6s \pm 0,1s\end{aligned}$$

Die berechneten Werte ergeben sich zu:  
amplitudenmodulierte Oszillationsdauer:

$$\begin{aligned}T_{leicht}(l = 20cm) &= 1,36s \\T_{schwer}(l = 20cm) &= 1,36s \\T_{schwer}(l = 40cm) &= 1,31s\end{aligned}$$

Schwebungsdauer:

$$\begin{aligned} T_{\text{leicht}}(l = 20\text{cm}) &= 53,6\text{s} \\ T_{\text{schwer}}(l = 20\text{cm}) &= 94,0\text{s} \\ T_{\text{schwer}}(l = 40\text{cm}) &= 24,5\text{s} \end{aligned}$$

## 2.5 Kopplungsgrade

Drei verschiedene Kopplungsgrade werden berechnet. Siehe dazu Datenblatt F.

$$\begin{aligned} K_{\text{leicht}}^a(20\text{cm}) &= \frac{kl_{20\text{cm}}^2}{m_{\text{leicht}}gL + kl_{20\text{cm}}^2} = 0,051 \pm 0,006 \\ K_{\text{schwer}}^a(20\text{cm}) &= \frac{kl_{20\text{cm}}^2}{m_{\text{schwer}}gL + kl_{20\text{cm}}^2} = 0,029 \pm 0,004 \\ K_{\text{schwer}}^a(40\text{cm}) &= \frac{kl_{40\text{cm}}^2}{m_{\text{schwer}}gL + kl_{40\text{cm}}^2} = 0,107 \pm 0,012 \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} K_{\text{leicht}}^b(20\text{cm}) &= \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2 + \omega_1^2} = 0,039 \pm 0,009 \\ K_{\text{schwer}}^b(20\text{cm}) &= \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2 + \omega_1^2} = 0,027 \pm 0,008 \\ K_{\text{schwer}}^b(40\text{cm}) &= \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2 + \omega_1^2} = 0,092 \pm 0,007 \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} K_{\text{leicht}}^c(20\text{cm}) &= \frac{2\omega_2\omega_3}{\omega_2^2 + \omega_3^2} = 0,048 \pm 0,004 \\ K_{\text{schwer}}^c(20\text{cm}) &= \frac{2\omega_2\omega_3}{\omega_2^2 + \omega_3^2} = 0,027 \pm 0,022 \\ K_{\text{schwer}}^c(40\text{cm}) &= \frac{2\omega_2\omega_3}{\omega_2^2 + \omega_3^2} = 0,092 \pm 0,008 \end{aligned} \quad (82)$$

Die Fehler sind Gauß-Fehler.

## **Literatur**

- [1] A. Birnesser / S. Wagner (2000): Grundpraktikum der Physik 2000, Versuch Nr. 2, Gekoppelte Pendel; Ulm: Universität Ulm
- [2] Bergmann / Schaefer (1998): Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1: Mechanik, Relativität, Wärme; Berlin, New York: De Gruyter
- [3] P. Tipler (1998): Physik; Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag
- [4] H. Kuchling (1996): Taschenbuch der Physik; Leipzig: Fachbuchverlag

## Abmessungen

Messungenauigkeit Länge Stab: 1 mm

Messungenauigkeit Länge Zylinder: 0,1 mm

Messungenauigkeit Massen: 0,1 g

## Abmessungen

	linkes Pendel	rechtes Pendel	Mittelwert	Standardabweichung
<b>Zylinder groß</b>				
Masse in [g]	600	600,2	600,1	0,1414
Außendurchmesser in [mm]	39,9	39,9	39,9	0,0354
Innendurchmesser in [mm]	4,0	4,0	4,0	0,0000
Länge in [mm]	62,0	62,0	62,0	0,0000
<b>Zylinder klein</b>				
Masse in [g]	303,3	302,6	303,0	0,4950
Außendurchmesser in [mm]	39,9	39,9	39,9	0,0354
Innendurchmesser in [mm]	4,0	4,0	4,0	0,0000
Länge in [mm]	31,0	31,0	31,0	0,0000
<b>Stange</b>				
Masse in [g]	89,5	89,1	89,3	0,2828
Länge in [mm]	513,00	513,00	513,00	0,0000

Schwerpunkt Zylinder groß in [mm]:	<b>452,79</b>
Messungenauigkeit [mm]:	1
Schwerpunkt Zylinder klein in [mm]:	<b>442,63</b>
Messungenauigkeit [mm]:	1

## Bestimmung der Federkonstanten

Masse in [g]: 10,0  
Messungenauigkeit der Zeit in [s]: 0,5

### Bestimmung der Federkonstanten k:

	Schwingungszeit $t$ in [s] für 10 Perioden
Messung 1	4,10
Messung 2	4,16
Messung 3	4,15
Messung 4	4,19
Messung 5	4,17
Messung 6	4,12
Messung 7	4,17
Messung 8	4,20
Messung 9	4,15
Messung 10	4,19

Mittelwert in [s]: 4,16  
Standardabweichung in [s]: 0,0313

Periodendauer  $T$  in [s]: 0,416

Federkonstante in [N/m]	2,3
Gauss - Fehler in [N/m]	0,3

## Berechnete Trägheitsmomente

Trägheitsmoment mit großer Masse in [kgm<sup>2</sup>]

**0,1475 ± 0,0006**

Trägheitsmoment mit kleiner Masse in [kgm<sup>2</sup>]

**0,0829 ± 0,0003**

## Gemessene Trägheitsmomente

ungekoppelte Schwingung (jeweils 10 Perioden)

	Pendel mit kleiner Masse		Pendel mit großer Masse	
	links t <sub>l</sub> in [s]	rechts t <sub>r</sub> in [s]	links t <sub>l</sub> in [s]	rechts t <sub>r</sub> in [s]
Messung 1	14	14	13,8	13,8
Periodendauer T in [s]	1,40	1,40	1,38	1,38
<b>Trägheitsmoment in [kgm<sup>2</sup>]</b>	<b>0,085</b>	<b>0,085</b>	<b>0,148</b>	<b>0,148</b>
Gauss-Fehler [kgm <sup>2</sup> ]	0,01	0,01	0,02	0,02

## Datenblatt D

### Berechnete Schwingungsdauer

Schwingungsd. mit großer Masse ( $l=40\text{cm}$ ) in [s]	1,38
Schwingungsdauer mit gr. Masse ( $l=20\text{cm}$ ) in [s]	1,38
Schwingungsdauer mit kleiner Masse in [s]	1,40

### Gemessene Schwingungsdauer

gleichsinnige Schwingung (jeweils 10 Perioden)

	Pendel mit kl. Masse	Pendel mit gr. Masse ( $l = 20\text{cm}$ )	Pendel mit gr. Masse ( $l = 40\text{cm}$ )
Messung 1	13,97	13,85	13,81
Messung 2	13,94	13,84	13,82
Messung 3	13,62	13,68	13,79
Messung 4	13,75	13,87	13,69
Messung 5	13,75	13,84	13,84
Messung 6	13,78	13,90	13,81
Messung 7	13,84	13,90	13,66
Messung 8	13,81	13,93	13,73
Messung 9	13,94	13,72	13,80
Messung 10	13,91	13,81	13,77
Mittelwert in [s]	13,83	13,83	13,77
Standardabweichung in [s]	0,1106	0,0795	0,0596
<b>Periodendauer in [s]</b>	<b>1,38</b>	<b>1,383</b>	<b>1,377</b>

## Datenblatt D

### Berechnete Schwingungsdauer

Schwingungsd. mit großer Masse ( $l=40\text{cm}$ ) in [s]	1,240
Schwingungsdauer mit gr. Masse ( $l=20\text{cm}$ ) in [s]	1,341
Schwingungsd. mit kleiner Masse in [s]	1,331

### Gemessene Schwingungsdauer

#### gegenseitige Schwingung (jeweils 10 Perioden)

	Pendel mit kl. Masse	Pendel mit gr. Masse ( $l = 20\text{cm}$ )	Pendel mit gr. Masse ( $l = 40\text{cm}$ )
Messung 1	13,35	13,5	12,53
Messung 2	13,31	13,58	12,56
Messung 3	13,41	13,43	12,63
Messung 4	13,41	13,53	12,46
Messung 5	13,25	13,53	12,5
Messung 6	13,28	13,35	12,53
Messung 7	13,22	13,35	12,66
Messung 8	13,31	13,43	12,65
Messung 9	13,22	13,44	12,53
Messung 10	13,27	13,48	12,47
Mittelwert in [s]	13,30	13,46	12,55
Standardabweichung in [s]	0,0695	0,0764	0,0721
<b>Periodendauer in [s]</b>	<b>1,330</b>	<b>1,346</b>	<b>1,255</b>



## Datenblatt 1

### Berechnet

Schwingungsdauer mit kleiner Masse [s]	1,36	Schwingungsd. mit großer Masse (l=40cm) in [s]	1,31
Schwebungsdauer mit kleiner Masse [s]	53,6	Schwingungsd. mit großer Masse (l=40cm) in [s]	24,5
		Schwingungsd. mit großer Masse (l=20cm) in [s]	1,36
		Schwingungsd. mit großer Masse (l=20cm) in [s]	94,0

### Gemessen

#### Schwebung

	Kleine Masse		Große Masse (l = 20cm)		Große Masse (l = 40cm)	
	t in [s] nach 5 Stillst.	# Oszillationen nach 2 Stillst.	t in [s] nach 5 Stillst.	# Oszillationen nach 2 Stillst.	t in [s] nach 5 Stillst.	# Oszillationen nach 2 Stillst.
Messung 1	141,6	42	253,3	75	68,7	22
Messung 2	142,1	43	255,9	76	68,8	21
Messung 3	141,9	43	253,3	75	68,8	22
Messung 4	141,6	41	254,3	75	69,1	22
Messung 5	142,1	41	255,3	75	69	21
Messung 6		41		75		21
Messung 7		41		75		22
Messung 8		42		75		22
Messung 9		42		75		21
Messung 10		43		76		22
Mittelwert	141,860	42,000	254,420	75,200	68,880	21,600
Standardabweichung	0,2510	0,8756	1,1713	0,4216	0,1643	0,5164
<b>Schwingungsdauer in [s]</b>		<b>1,35</b>		<b>1,35</b>		<b>1,28</b>
<b>Schwebungsdauer in [s]</b>	<b>56,7</b>		<b>101,8</b>		<b>27,6</b>	

## Datenblatt F

### Berechneter Kopplungsgrad

	große Masse (l=20cm)	große Masse (l=40cm)	kleine Masse
Kopplung a)	0,029	0,107	0,051
Gauss - Fehler	0,004	0,012	0,006
Kopplung b)	0,027	0,092	0,039
Gauss - Fehler	0,008	0,007	0,009
Kopplung c)	0,027	0,092	0,048
Gauss - Fehler	0,022	0,008	0,004