

Fortgeschrittenenpraktikum der Physik
Universität Ulm

Versuch 9 : Mössbauereffekt

Versuchsbetreuer: G. I. Asbach
Versuchsdurchführung: 20.6. und 27.6.2002

Dominik Fritz
dominik.fritz@wirtschaftsphysik.de

Stefan Fischer
stefan.fischer@wirtschaftsphysik.de

Gruppennummer: 529

28. August 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Zum Standard-Modell der Elementarteilchenphysik	3
1.1.1	Fundamentale Teilchen	3
1.1.2	Fundamentale Wechselwirkungen	4
1.2	Kernmodelle	5
1.2.1	Das Schalenmodell	5
1.2.2	Das Tröpfchenmodell	6
1.2.3	Das Fermigasmodell	7
1.3	Radioaktive Strahlung	9
1.3.1	Natürliche Strahlung, künstliche Strahlung	9
1.3.2	Der Alphazerfall	9
1.3.3	Der Betazerfall	10
1.3.4	Die Gammastrahlung	11
1.3.5	Vergleich der Strahlungsarten	11
1.4	Wechselwirkung von Strahlung und Materie	11
1.4.1	Photoeffekt	12
1.4.2	Comptoneffekt	13
1.4.3	Paarbildung	13
1.5	Nachweis radioaktiver Strahlung	14
1.5.1	Nebelkammer	14
1.5.2	Geiger-Müller Zählrohr	14
1.5.3	Szintillationsdetektor	14
1.5.4	Halbleiterdetektor	15
1.6	Mössbauereffekt	16
1.6.1	Linienverbreiterung bei γ -Strahlung	16
1.6.2	Betrachtung einzelner Atome	18
1.6.3	Betrachtung zweiatomiger Moleküle	20
1.6.4	Betrachtung eines Kristalls	22
1.6.5	Nachweismöglichkeiten der Resonanzabsorption	25
1.6.6	Hyperfeinwechselwirkungen	29
2	Versuchsauswertung	32
2.1	Kanaleichung	32
2.2	Totzeit	32
2.3	Cs-137	33
2.4	Energie-Kanal-Zuordnung für Cäsium	36
2.5	Co-57	36
2.6	Energie-Kanal-Zuordnung für Cobalt	39
2.7	verschiedene Absorber und ihre Wirkung auf die Spektrallinien	40
2.7.1	Cobalt mit Plexiglas	40
2.7.2	Cobalt mit Aluminium	42

2.8	Der Mössbauer-Effekt	43
2.8.1	Berechnung der natürlichen Linienbreite	44
2.8.2	mit Edelstahl	44
2.8.3	mit Eisensulfat	46
2.8.4	mit natürlichem Eisen	47
3	Fehlerdiskussion	48

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Zum Standard-Modell der Elementarteilchenphysik

Das Standard-Modell der Elementarteilchenphysik umfasst die im wesentlichen von dem pakistanischen Physiker Abdus Salam (*1926) und dem Amerikaner Steven Weinberg (*1933) ausgearbeitete elektroschwache Theorie, die die elektromagnetische mit der schwachen Wechselwirkung vereinigt, wofür sie 1979 gemeinsam mit Glashow den Nobelpreis für Physik erhielten, sowie die Quantenchromodynamik (Neeman, Gell-Mann, Zweig, u.a.), welche die starke Wechselwirkung beschreibt. Jenseits des Standard-Modells verspricht die GUT-Theorie (Grand Unified-Theory von Georgi und Glashow) eine Vereinigung der starken- mit der elektroschwachen Wechselwirkung und postuliert darüberhinaus eine endliche Lebensdauer des Protons, welche durch Experimente bisher noch nicht bestätigt werden konnte. Eine Sonderrolle in all diesen Theorien nimmt die Gravitation ein, die bisher noch nicht zufriedenstellend mit den anderen Wechselwirkungen vereinigt werden konnte.

1.1.1 Fundamentale Teilchen

Nach heutigem Stand ist alle Materie aus 12 verschiedenen Fermionen (halbzahliger Spin im Gegensatz zu den Bosonen mit ganzzahligem Spin) und deren Antiteilchen aufgebaut, die sich in zwei Arten von Elementarteilchen klassifizieren lassen, in sechs Quarks und sechs Leptonen zuzüglich ihrer entsprechenden Antiteilchen. Weitergehend kann man sowohl Quarks als auch Leptonen in drei Familien unterteilen, die in folgender Tabelle samt ihrer wesentlichen Teilcheneigenschaften dargestellt sind.

	Quarks	$\frac{Q}{e}$	Leptonen	$\frac{Q}{e}$
1. Familie	down	$-\frac{1}{3}$	Elektron-Neutrino ν_e	0
	up	$+\frac{2}{3}$	Elektron e^-	-1
2. Familie	strange	$-\frac{1}{3}$	Myon-Neutrino ν_μ	0
	charme	$+\frac{2}{3}$	Myon	-1
3. Familie	bottom	$-\frac{1}{3}$	Tau-Neutrino ν_τ	0
	up	$+\frac{2}{3}$	Tau τ	-1

Leptonen unterliegen der schwachen, jedoch nicht der starken Wechselwirkung, und werden als punktförmige, stukturlose Dirac-Teilchen beschrieben, d.h. die zeitliche Entwicklung ihrer Wellenfunktion gehorcht der Diracgleichung. Quarks werden ebenfalls als strukturlos und punktförmig angenommen, doch sind vermutlich nicht frei beobachtbar, was mit einer Eigenschaft der starken Wechselwirkung zusammenhängt, die im nächsten Abschnitt kurz angedeutet werden soll. Quarkgruppen aus zwei oder drei Quarks werden Hadronen genannt und unterliegen ebenfalls der starken Wechselwirkung. Sie besitzen eine innere Struktur und lassen sich entsprechend ihres Spinwertes in Mesonen mit ganzzahligem und Baryonen mit halbzahligen Spin unterscheiden. Damit gehören Mesonen zu den Bosonen; sie sind aus Quark-Antiquark-Paar aufgebaut, während Baryonen Fermionen mit drei Quarks sind. Beipielsweise gehören das Proton (uud) und das Neutron (udd) zu den Baryonen. Allen Baryonen wird eine Barionenzahl $B = 1$ zugeordnet, den Anti-Baryonen entsprechend $B = -1$. Genauso ordnet man den

Leptonen eine Leptonenzahl $L = \pm 1$ zu, wobei sich bei einem System von Elementarteilchen Leptonen- und Baryonenzahl getrennt addieren. Das Proton besitzt damit die Leptonenzahl $L = 0$ und Baryonenzahl $B = 1$, wogegen für das Positron $L = -1$ und $B = 0$ ist. Damit sind wir nun in der Lage die fundamentalen Erhaltungssätze des Standardmodells anzuführen. Bei allen Teilchenumwandlungsprozessen gelten:

- Energieerhaltung
- Impulserhaltung
- Drehimpulserhaltung
- Baryonenzahlerhaltung
- Leptonenzahlerhaltung
- Erhaltung des Gesamtspins.

1.1.2 Fundamentale Wechselwirkungen

In der Physik gibt es vier elementare Wechselwirkungen. Sie werden durch die sogenannten Eichbosonen vermittelt:

1. Die Gravitation ist die älteste bekannte Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen, sie ist gleichzeitig die umfassendste, da sie auf alle bekannten Objekte (sowohl materielle als auch energetische) gleichermaßen wirkt. Sie wird durch das Gravitationsgesetz von ISAAC NEWTON beschrieben:

$$\Phi_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}$$

Die Gravitation ist eine langreichweitige Kraft, das Gravitationsfeld wird durch die Gravitonen mit Spin 2 übertragen.

2. Die elektromagnetische Wechselwirkung wirkt nur auf elektrisch geladene Teilchen. Durch die Maxwell'schen Gleichungen wurde klar, dass durch das Gesetz von COULOMB

$$\Phi_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}$$

sowohl die elektrische als auch die magnetische Wechselwirkung beschrieben werden kann. Vom elektromagnetischen Feld weiß man, dass die (virtuelle) Photonen die felderzeugenden Quanten sind. Auch die elektromagnetische Kraft ist eine langreichweitige Kraft.

3. Die starke Wechselwirkung ist für den Zusammenhalt der Kerne trotz der Abstoßung durch die Coulomb-Kraft verantwortlich. Diese Wechselwirkung wird durch das YUKAWA-Potential beschrieben, welches eine kurzreichweitige Kraft zur Folge hat.

$$\Phi_{Yuk} = \frac{e^{-kr}}{r}$$

Die Feldquanten sind sogenannte Gluonen mit Spin 1.

Wechselwirkung	relative Stärke	Reichweite [m]	Wechselwirkung zwischen	Eichboson
starke	1	$\approx 10^{-5}$	Farbladungen und Quarks	Gluon g
elektromagnetische	$\approx 10^{-2}$	∞	elektrischen Ladungen	Photon γ
schwache	$\approx 10^{-14}$	$\approx 2 \cdot 10^{-18}$	Leptonen und Hadronen	W^\pm, Z^0 Boson
Gravitation	$\approx 10^{-38}$	∞	allen Teilchen	(Graviton)

Tabelle 1: Übersicht über die vier Wechselwirkungen

Teilchen	Ladung	m_0/MeV	F_G	F_C	F_{strong}	F_{weak}	magn. Moment μ	Spin
Elektron	e^-	0.510999	+	+	-	+	$+1.00116\mu_B$	1/2
Proton	e^+	938.272	+	+	+	+	$+2.79285\mu_K$	1/2
Neutron	0	939.566	+	-	+	+	$-1.91304\mu_K$	1/2
(e^-) -Neutrino	0	$< 7.3 \cdot 10^{-6}$	+	-	-	+	$< 1.08 \cdot 10^{-9}$	1/2

Tabelle 2: Übersicht über den Zusammenhang zwischen den Elementarteilchen und den Wechselwirkungen

- Die schwache Wechselwirkung ist für den Zusammenhalt der Kernbausteine verantwortlich. Wie bereits erwähnt können sich die Kernteilchen ineinander umwandeln. Dass dieses nicht ständig geschieht ist das Resultat der schwachen Wechselwirkung. Ihre Träger sind das neutrale Z^0 - Boson, sowie die geladenen W^+ - und W^- -Bosonen mit Spin 1.

Hierbei sind $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.78838 \cdot 10^{-5} T^{-1} eV$ das Bohrsche Magneton und $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.15245 \cdot 10^{-8} T^{-1} eV$ das dazu analoge Kernmagneton.

1.2 Kernmodelle

Die in der Natur vorkommenden Kerne sind aus bis zu 92 Protonen und 146 Neutronen aufgebaut. Die quantenmechanische Behandlung eines solchen Vielfermionensystems ist angesichts der Komplexität der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen ausgesprochen schwierig. Umso erstaunlicher war daher die Erfahrung, dass viele Kerneigenschaften durch recht einfache Modelle beschrieben werden können, von denen einige in diesem Abschnitt präsentiert werden.

1.2.1 Das Schalenmodell

Auch bei den Atomkernen gibt es eine große Zahl experimenteller Fakten, die auf eine Schalenstruktur hinweisen. Allgemein ausgedrückt kommt dies, wie bei den Atomen, darin zum Ausdruck, dass sich die Energiezustände der Nukleonen deutlich gruppieren. Bei bestimmten Nukleonenzahlen haben infolgedessen verschiedene experimentell bestimmbare Größen Maxima und Minima, die immer wieder bei den gleichen Zahlen $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$ und $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ liegen. Man spricht von magischen Nukleonenzahlen.

Bei der Formulierung des Schalenmodells der Atomkerne stieß man auf eine Schwierigkeit, die bei der Elektronenhülle nicht besteht. Die Nukleonen bewegen sich nicht in einem Zentralfeld, das vom Zentrum des Kerns ausgeht. Der Ausweg besteht in einem unter der Bezeichnung

Hartree-Fock-Methode bekannt gewordenen Verfahren der Quantenmechanik. Auf die Kerne übertragen wird angenommen, dass die stark miteinander wechselwirkenden Nukleonen ein mittleres Feld der Kernkräfte schaffen, in dem sie sich unabhängig voneinander bewegen. Die Lösung erfolgt über eine Schrödingergleichung. Der Hamiltonoperator wird dadurch vereinfacht, dass die Summe über die Potentiale der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen V_{ij} durch eine Summe über abstandabhängige Potentiale $V(r_i)$ der Nukleonen ersetzt wird. Die Form des Potentials $V(r_i)$ ist natürlich entscheidend für den Erfolg dieses Modells.

Der Hamiltonoperator wird wie folgt umgeschrieben.

$$H = \sum_i (T_i + V(r_i)) + \left(\sum_{ij} V(r_{ij}) - \sum_i V(r_i) \right) \quad (1)$$

In der vereinfachten Betrachtung dieses Problems wird der Restwechselwirkungsterm

$$V_R = \sum_{ij} V(r_{ij}) - \sum_i V(r_i)$$

vernachlässigt.

Das Modell liefert als Lösung die Energie-Eigenwerte der Hamiltonfunktion. Sehr gute Erfolge erzielt man bei der Erklärung der niedrigen magischen Zahlen. Bei den höheren magischen Zahlen muss man allerdings weitere quantenmechanische Effekte wie zum Beispiel die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigen.

Als Weiterentwicklung des Schalenmodells kann man auch das Kollektivmodell sehen. Darin werden die Schalen nicht mehr als starr kugelförmig aufgefasst, sondern es sind auch Rotationen und Vibrationen der Schale möglich.

1.2.2 Das Tröpfchenmodell

Unter Berücksichtigung der Flüssigkeitseigenschaften der Kernmaterie, d.h. der Tatsache, dass die Kerndichte und die spezifische Kernbindungsenergie näherungsweise unabhängig von der Massenzahl A sind, wurde von C. F. von Weizsäcker der Versuch unternommen, den Kern als Flüssigkeitströpfchen zu beschreiben. Im Rahmen dieser Modellvorstellung sollte die Ruhe- und die Bindungsenergie berechnet werden. Später wurde dieses Modell durch die Bemühung um die Verringerung der Fehler der berechneten Daten entscheidend verbessert.

Beim Tröpfchenmodell geht man davon aus, dass die Gesamtbindungsenergie des als Tröpfchen einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachteten Kerns als Summe verschiedener Beiträge berechnet werden kann:

$$E_B = \sum_{i=1}^n E_i \quad (2)$$

In Analogie zur Flüssigkeit lässt sich eine Volumen- oder Kondensationsenergie einführen:

$$E_1 = aA \quad (3)$$

Die Abstoßung der Protonen durch die Coulombkraft wirkt in Richtung einer Verminderung der Bindungsenergie E_B . Das wird durch den sogenannten Coulomb-Energieterm berücksichtigt. Da jedes Proton im Kern mit jedem anderen Kernproton über die Coulomb-Kraft wechselwirkt, ist die Wechselwirkungsenergie proportional zu $Z(Z - 1)$ und für $Z \gg 1$ in guter Näherung proportional zu Z^2 . Wegen der $1/r$ -Abhängigkeit des Coulomb-Potential kann man schreiben:

$$E_2 = -b \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (4)$$

Auf der Grundlage der Vorstellung der Oberflächenspannung des Tröpfchens muss ein Oberflächenenergieterm eingeführt werden. So wie beim Tröpfchen Moleküle an der Oberfläche weniger fest gebunden sind, so sollten es auch die Nukleonen an der Kernoberfläche sein. Dieser Term ist proportional zur Oberfläche

$$E_3 = -cA^{2/3} \quad (5)$$

Die Bindungsenergie hängt auch vom Verhältnis N/Z ab, d.h. vom Neutronenüberschuß $N - Z$. Unabhängig vom Vorzeichen nimmt E_B parabelförmig von einem Maximalwert für die stabilsten Kerne steil ab. Stabile Kerne sind für kleine A bei $Z = N$ und für große bei $N > Z$ zu finden. Der Asymmetriebeitrag ist:

$$E_4 = -d \frac{(N - Z)^2}{A} \quad (6)$$

Zur Beschreibung der dreifachen Aufspaltung der Energieoberfläche der Kerne, ist von E. Fermi zusätzlich ein sogenannter Paarenergieterm eingeführt worden. Das empirische Korrekturglied lautet:

$$= +\Delta \quad \text{für } gg - \text{ Kerne} \quad (7)$$

$$E_5 = 0 \quad \text{für } uA - \text{ Kerne} \quad (8)$$

$$= -\Delta \quad \text{für } gg - \text{ Kerne} \quad (9)$$

Das Zusammenfassen aller Beiträge liefert:

$$E_B = aA - b \frac{Z^2}{A^{1/3}} - cA^{2/3} - d \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \Delta \quad (10)$$

Trägt man diese Gleichung auf, so erhält man folgendes Schaubild:

1.2.3 Das Fermigasmodell

Dieses Modell ist eine sehr starke Vereinfachung. Abgesehen von dem Einschluss der Teilchen auf ein Volumen $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ bewegen sich die Nukleonen frei. Obwohl dieses Modell also keinerlei Korrelationen der Nukleonenbewegungen kennt und somit die individuellen Eigenschaften

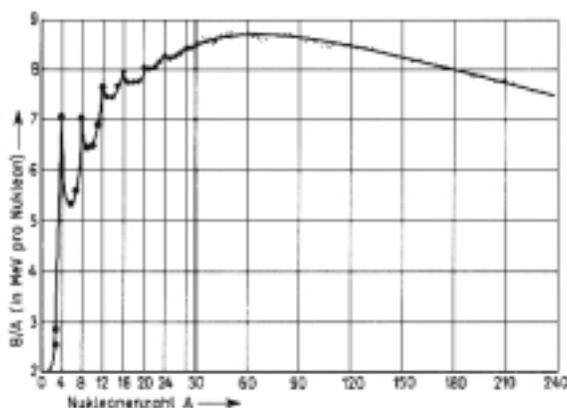


Abbildung 1: Bindungsenergie

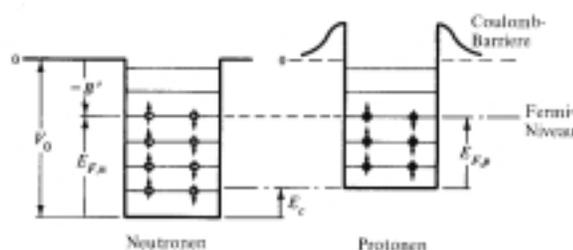


Abbildung 2: Potentialtopf des Fermigasmodells

tiefliegender Kernzustände schlecht beschreibt, vermittelt es einige sehr wichtige Abschätzungen über die Dichte und Besetzung der Einteilchenzustände in Kernen.

Die in der Realität vorhandene Wechselwirkung wird durch einen Potentialtopf ersetzt, der durch ein Kastenpotential angenähert wird.

Das Protonenpotential liegt aufgrund der Coulombenergie höher als das Neutronenpotential. Außerdem zeigt es eine Coulombbarriere, an der von außen ankommende Protonen, aufgrund der Kernladung, abgestoßen werden.

Die quantenmechanische Behandlung dieses Fermi-Gases führt zu diskreten Werten für den Wellenvektor k der Protonen und Neutronen im Kern. Die Einteilchen-Zustandsdichte dn/dp , also die Zahl der Einteilchenzustände im Impulsintervall p bis dp , errechnet sich aus der Bedingung, dass der gesamte Phasenraum $4\pi p^2 V dp$ in Zellen von der Größe h^3 eingeteilt wird:

$$\frac{dn}{dp} = \frac{4\pi V p^2}{h^3}$$

Mit $p^2 = 2mE$ wird daraus

$$\frac{dn}{dE} = \frac{4\pi V(2m^3E)^{1/2}}{h^3} \quad (11)$$

Wir verteilen nun die A Nukleonen des Kerns vollständig auf die tiefstmöglichen Zustände, so dass jede Phasenraumzelle mit zwei Protonen und Neutronen mit entgegengesetzt gerichteten Spins besetzt sind. Die Integration der Gleichung liefert eine Beziehung zwischen A und der Fermi-Energie E_F , bis zu der die Einteilchenzustände besetzt sind:

$$A = 4 \int_0^{E_F} \frac{dn}{dE} dE$$

Daraus erhält man die Beziehung für die Fermienergie:

$$E_F = \frac{3\hbar^2}{8mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{1/3} \quad (12)$$

Dieses Ergebnis gestattet uns die Abschätzung der Fermienergie. Mit $r_0 = 1,1$ fm ergibt sich eine Fermienergie von $E_F = 39$ MeV. Addiert man zur Fermienergie die mittlere Bindungsenergie eines Nukleons, $B/A \approx 8,0$ MeV so gewinnt man eine recht realistische Abschätzung des Kernpotentials zu 50 MeV.

Diese Abschätzung ergibt sich allerdings nur beim absoluten Nullpunkt. Bei höheren Temperaturen ist die Fermi-Dirac-Statistik anzuwenden.

1.3 Radioaktive Strahlung

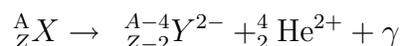
1.3.1 Natürliche Strahlung, künstliche Strahlung

Von den ca. 1500 heute bekannten Nukliden kommen rund 500 in der Natur vor. 249 davon sind stabil, der Rest ist radioaktiv. Die Strahlung, die beim Zerfall dieser Radionuklide ausgesandt wird, nennen wir natürliche ionisierende Strahlung. Die restlichen rund 1000 Nuklide gibt es jedoch erst wieder, seit dem sich der Mensch mit Kernforschung und Kerntechnik auseinandersetzt. Dies sind rund 100 Jahre. Diese Nuklide sind künstlich entstanden. Sie alle sind radioaktiv. Die Strahlung dieser Gruppe Radionuklide wird künstliche ionisierende Strahlung genannt.

1.3.2 Der Alphazerfall

1904 wurde bekannt, dass bei Radiumverbindungen, die α -Strahlen aussenden, Helium auftritt. Dieses Helium konnte nur beim Zerfall des Radiums entstanden sein. Alle weiteren Versuche führten zur folgenden Feststellung: Beim α -Zerfall werden Teilchen ausgesandt. Alle diese Teilchen bestehen aus 2 Protonen und aus 2 Neutronen. Diese Teilchen sind also Heliumkerne. Die ausgesandten Teilchen werden α -Teilchen genannt. Nach einem α -Zerfall fehlen dem ursprünglichen Nuklid 2 Protonen und 2 Neutronen. Das ursprüngliche Element hat sich also durch den Zerfall in ein neues gewandelt.

α -Strahlung ist stark ionisierend. Ihre Reichweite in Materie ist daher mit wenigen cm extrem kurz. Verschiebungsgesetz:



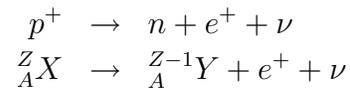
1.3.3 Der Betazerfall

Beim β -Zerfall werden ebenfalls Teilchen ausgesandt. Diese Teilchen verhalten sich wie Elektronen. Zum Beispiel werden sie, dank ihrer kleinen Masse, leicht in Magnetfeldern abgelenkt. Man nennt diese Teilchen β -Teilchen. Es gibt 2 Sorten von β -Teilchen.

Bei den einen stimmen Masse, Ladung und Verhalten genau mit denen der Elektronen überein. Hier werden also Elektronen ausgesandt. Eine derartige Strahlung heißt β^- -Strahlung.

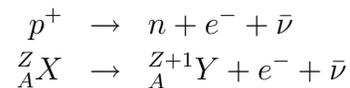
Die zweite Sorte der ausgesandten Teilchen unterscheidet sich von den Elektronen lediglich durch ihre Ladung. Elektronen sind negativ geladen. Diese Teilchen jedoch sind positiv geladen. Sie werden Positronen genannt. Eine derartige Strahlung heißt auch β^+ -Strahlung.

Experimente haben gezeigt, dass sich Neutronen in Protonen und Protonen in Neutronen umwandeln können. Betrachten wir eine solche Umwandlung. In diesem Beispiel soll ein Proton in ein Neutron umgewandelt werden. Wir wissen, das Proton ist positiv geladen, das Neutron ist ungeladen. Bei der Umwandlung muss also noch ein Teilchen entstehen, das die positive Ladung aufnehmen kann. Sonst wäre die Gesamtladung nach der Umwandlung nicht gleich der Gesamtladung vor der Umwandlung. Das Positron erfüllt diese Aufgabe. Es hat die gleiche Masse wie ein Elektron, ist jedoch positiv geladen. Da es keine freien Positronen im Kern geben kann, werden diese nach der Entstehung sofort aus dem Kern emittiert.



Ursprünglich glaubte man, der β -Zerfall verletze das Gesetz der Energieerhaltung. Denn das beim β^+ -Zerfall erzeugte Neutron und das erzeugte Positron haben eine kleinere Totalenergie als das ursprüngliche Proton. Beim β -Zerfall entsteht aber noch ein drittes Teilchen. Dieses wird Neutrino genannt. Das Neutrino wird ebenfalls aus dem Kern emittiert. Es trägt den restlichen Teil der Energie, die beim Zerfall entsteht, mit sich. Das Neutrino ist ungeladen.

Beim β^- -Zerfall entsteht ein Antineutrino. Das Antineutrino verhält sich gleich wie das Neutrino. Es ist ungeladen und trägt ebenfalls den restlichen Teil der Zerfallsenergie mit sich.



Von einem Elektroneneinfang spricht man, wenn ein Elektron der Atomhülle mit dem Kern reagiert. Dabei wird ein Proton in ein Neutron umgewandelt.



Da die K-Schale dem Kern am nächsten ist, ist ein Einfang von dieser am Wahrscheinlichsten. Den freigewordenen Platz nehmen nun Elektronen aus höheren Schalen unter Aussendung charakteristischer Röntgenstrahlung ein.

Die Ionisationsdichte bei β -Strahlung ist sehr viel geringer als bei α -Strahlung. Außerdem werden Elektronen auf ihrer Bahn durch die Coulomb-Potentiale anderer Atome sehr stark beeinflusst. Sie können also unter Umständen recht tief in Materie eindringen.

1.3.4 Die Gammastrahlung

Nach einem α - oder β -Zerfall ist der Kern oft in einem angeregten Zustand. Das heißt, im Kern befindet sich noch Energie, die abgebaut werden sollte. Dieser Energieabbau erfolgt durch Ausstrahlen elektromagnetischer Strahlung.

Diese Strahlung hat die gleiche Natur wie sichtbares Licht. Auch Licht ist eine elektromagnetische Strahlung. Doch die γ -Strahlung ist viel kurzwelliger und darum viel energiereicher als das Licht.

Der angeregte Kern gibt jedoch seine Energie nicht kontinuierlich ab. γ -Strahlen werden in einzelnen Quanten ausgesandt. Man sagt, es wird ein Photon oder γ -Quant ausgesandt.

Die Wirkung der Gammastrahlung auf Materie wird im folgenden Abschnitt ausführlich besprochen.

1.3.5 Vergleich der Strahlungsarten

Die folgende Tabelle zeigt die Reichweite verschiedener Strahlungsarten in Wasser oder organischem Gewebe.

Strahlung	Energie	Reichweite
α	5 MeV	40 μm
β	0,02 MeV	10 μm
	1 MeV	7 mm
γ	0,02 MeV	6,4 cm
	1 MeV	65 cm

Der Energiebereich der Gammastrahlung liegt in der Größenordnung von einigen 10^3 eV bis zu einigen 10^7 eV.

Der Energiebereich der Röntgenstrahlung liegt zwischen 10^2 und 10^5 eV. Im Gegensatz zur Gammastrahlung resultiert die Röntgenstrahlung daraus, dass Elektronen aus einer energiereicheren in eine energieärmere Schale fallen, wohingegen Gammastrahlung aus Energieänderungen des Kerns resultiert.

1.4 Wechselwirkung von Strahlung und Materie

In diesem Abschnitt soll trotz der gewählten Überschrift, hauptsächlich auf die Wechselwirkung zwischen Gammastrahlung und Materie eingegangen werden.

Beim Durchgang durch Materie wird die Intensität elektromagnetischer Strahlung geschwächt. γ -Quanten treten dabei in Wechselwirkung mit:

- a) Atomelektronen
- b) Kernen
- c) elektrischen Feldern der Elektronen und Kerne

d) Mesonenfeldern der Kerne

Dabei treten Energieverluste, sowie Änderungen der Ausbreitungsrichtung und Polarisation auf. Die Beeinflussung der γ -Strahlung lassen sich unterscheiden in:

- a) Absorption
- b) inelastische Streuung
- c) elastische Streuung

Die Effekte sind in folgender Tabelle verdeutlicht. Die fett gekennzeichneten Prozesse sind am wichtigsten und werden in diesem Kapitel ausführlicher behandelt. Alle anderen Prozesse treten natürlich bei der Wechselwirkung zwischen γ -Strahlung und Materie auf, sind aber meist um mehrere Größenordnungen kleiner als die drei wichtigsten Prozesse.

	Absorption	Inelast. Streuung	Elast. Streuung
Elektronen	Photoeffekt	Comptoneffekt	Rayleigh-Streuung
Kerne	Kernphotoeffekt	Kernresonanzstr.	Thomson-Streuung
Elektr. Felder	Paarerzeugung	-	Delbrück-Streuung
Mesonenfelder	Mesonenerzeugung	-	-

1.4.1 Photoeffekt

Beim photoelektrischen Effekt wird ein Photon durch ein Atom als Ganzes absorbiert, wobei die Energie des Photons $h\nu$ auf ein Elektron des Atomverbandes übertragen wird. Die Absorption ist vollständig, d.h. nach der Wechselwirkung erscheint kein Photon mehr:

$$h\nu + A \rightarrow A^* + e^- \quad (13)$$

Die Energie, die das Elektron mitgeteilt bekommt, ist dabei die Differenz zwischen der Energie des Photons und der Bindungsenergie im Atom E_B .

$$E_{\text{Elektron}} = h\nu - E_B \quad (14)$$

Die Bindungsenergie E_B hängt davon ab, aus welcher Schale des Atoms das Elektron kommt und von der Kernladungszahl Z .

Der Photoeffekt ist bei allen Medien in einem Energiebereich unterhalb einiger 100 keV dominant.

Trägt man die Absorption gegenüber der Energie des Photons auf, so ergeben sich an den Stellen, an denen die Energie des Photons gleich der Bindungsenergie einer Schale ist, Maximumsprünge. Da von einem Atomelektron Energie nur quantenhaft aufgenommen werden kann, ist die Wahrscheinlichkeit des Photoeffektes am größten, wenn die Photonenenergie $h\nu$ der Bindungsenergie eines Elektrons einer Schale entspricht. Da außerdem die Schalen auf Grund anderer Quantenzahlen (Drehimpuls, Richtungsquantelung) Unterstrukturen haben, ergeben sich entsprechende Feinstrukturen der Absorptionskanten.

1.4.2 Comptoneffekt

Bei der Comptonstreuung von Gammaquanten handelt es sich um einen Streuprozess, bei dem nur ein Teil der Gammaenergie dem Elektron übertragen wird. Im Ergebnis ändern Gammaquant und Elektron ihre Richtung und Energie. Im Gegensatz zum Photoeffekt spielt hierbei die Bindung des Elektrons im Atom keine prinzipielle Rolle, vielmehr kann bei genügend hoher Gammaenergie $E_\gamma \gg E_B$ für praktische Berechnungen mit ausreichender Genauigkeit von der Streuung an einem freien, ruhenden Elektron ausgegangen werden. Die gesamte Kinematik des Prozesses lässt sich aus dem Energieerhaltungssatz

$$E_\gamma = E_{\gamma'} + E_e \quad (15)$$

und dem Impulserhaltungssatz in x- bzw. y-Richtung

$$\frac{E_\gamma}{c} = \frac{E_{\gamma'}}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi \quad (16)$$

$$0 = \frac{E_{\gamma'}}{c} \sin \theta + p_e \sin \phi \quad (17)$$

bei Beachtung der relativistischen Beziehungen ableiten. Für die Energie des gestreuten Quanten und Rückstoßelektron folgt somit:

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \epsilon(1 - \cos \theta)} \quad (18)$$

bzw.

$$E_{\gamma'} = E_\gamma \frac{1 - \cos \theta}{1 + \epsilon(1 - \cos \theta)} \quad (19)$$

mit

$$\epsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$$

Die Größe der Energieübertragung zwischen Photon und Elektron ist richtungsabhängig. Maximaler Energieübertrag findet bei Rückwärtsstreuung des Photons ($\theta = \pi$) statt.

Für die Änderung der Wellenlänge gilt:

$$\gamma' - \gamma = \gamma_e(1 - \cos \theta) \quad (20)$$

mit der sogenannten Compton-Wellenlänge des Elektrons $\gamma_e = 3,8610^{-13}$ m.

1.4.3 Paarbildung

Als Paarbildung bezeichnet man den Prozess der Emission eines Positrons und eines Elektrons infolge der Absorption eines Gammaquants im Coulomb-Feld des Atomkerns oder Elektrons. Die Geburt des Paares erfolgt nicht im Kern, sondern außerhalb, etwa in Entfernung einer

Compton-Wellenlänge vom Kernrand, so dass die Übertragung des Rückstoßimpulses an den Kern über das Coulomb-Feld erfolgt. Die Schwellenenergie des Paarbildungseffekts im Kernfeld ergibt sich aus der Summe der Ruhemasse von Elektron und Positron zu $2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}$.

1.5 Nachweis radioaktiver Strahlung

Sämtliche Nachweismöglichkeiten beruhen auf der ionisierenden Wirkung radioaktiver Strahlung. Die durch Photo- oder Compton-Effekt freigesetzten Elektronen werden zum eigentlichen Nachweis verwendet. Neben den unten aufgeführten Detektoren gibt es eine Vielzahl ausgereifter Nachweismöglichkeiten für radioaktive Strahlung. Vor allem die starke Nutzung der Kernenergie in militärischen und wirtschaftlichen Feldern hat dazu geführt, dass immer ausgereifere Detektoren konstruiert wurden.

1.5.1 Nebelkammer

Eine Nebelkammer ist eine absolut staubfreie Kammer, die mit an Wasserdampf übersättigter Luft gefüllt ist. Die entlang des Weges einfallender radioaktiver Strahlung entstehenden Ionen dienen als einzige Kondensationskeime. Es entsteht eine Nebelspur. Durch Anlegen eines Magnetfeldes kann auf die Art der Strahlung geschlossen werden. Zur quantitativen Analyse der Strahlung ist die Nebelkammer allerdings nur bedingt geeignet.

1.5.2 Geiger-Müller Zählrohr

Das Geiger-Müller Zählrohr besteht aus einem Zylinder (Anode), in dessen Mitte sich längs der Zylinderachse ein Wolframdraht (Kathode) befindet. Der Zylinder ist mit einem Zählgas, meist Argon, und einem Löschgas, meist Alkoholdampf, gefüllt. Das der Probe zugewandte Ende des Zylinders besteht aus einem Glimmerblättchen als Fenster. Zwischen Anode und Kathode wird durch eine externe Hochspannungsquelle eine starke Potentialdifferenz erzeugt. In das Zählrohr eintretende Strahlung ionisiert Zählgasatome. Die entstandenen Ion/Elektronpaare werden durch die Potentialdifferenz stark beschleunigt und ionisieren weitere Zählgasatome. Es kommt in der Folge zu einer vollständigen Ionisation des Zählgases. Die Spannung zwischen den Elektroden bricht zusammen, der entstandene Stromimpuls wird an einen Zähler weitergeleitet. Durch das Löschgas und einen Widerstand wird die Gasentladung gelöscht, so dass weitere Strahlung nachgewiesen werden kann. Dies dauert etwa 10^{-5} Sekunden, die Totzeit des Zählrohrs.

Neben der Ermittlung der Strahlendosis ist über die Wahl des Fenstermaterials begrenzt die Energieverteilung bestimmbar.

1.5.3 Szintillationsdetektor

Beim Szintillationsdetektor laufen folgende Prozesse hintereinander ab:

Das durch Photo- oder Compton-Effekt erzeugte Primärelektron wird abgebremst und bewirkt dadurch eine Ionisation (oder Anregung) der Szintillatoratome; die Anzahl der ionisierten Atome ist proportional zur Energie der Gammaquanten.

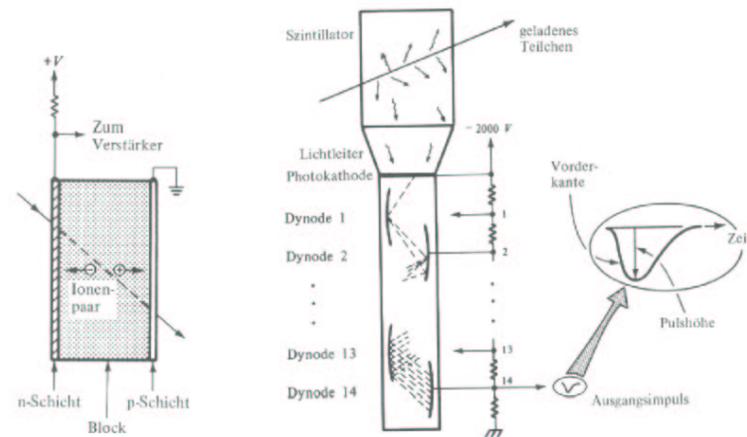


Abbildung 3: Schematischer Aufbau eines Szintillationsdetektors (1)

Diese rekombinieren unter Emission von Licht.

Das Licht löst Elektronen aus der Photokathode aus.

Die Elektronenlawine wird an den Dynoden des Sekundärelektronen-Vervielfachers verstärkt.

NaJ-Szintilliator: Dieser Szintilliator besitzt wegen des Jod-Anteils eine hohe Nachweiswahrscheinlichkeit für den Photoeffekt. Ein NaJ-Detektor besitzt allerdings nur eine mäßig gute Energieauflösung ($\Delta E \approx 50 \text{ keV}$ bei 1 MeV) und die Zeitauflösung erreicht bei etwa 2 ns ihre Grenze.

1.5.4 Halbleiterdetektor

Neben den Szintillatoren spielen die Halbleiterdetektoren zum γ -Nachweis eine wichtige Rolle. Sie sind Ionisationsdetektoren, bei denen die durch das einfallende Gammaquant freigesetzte Ladung an einer Elektrode aufgesammelt wird. Daher ist eine wesentliche Voraussetzung für das Funktionieren des Halbleiterdetektors eine verschwindend kleine Leitfähigkeit der Anordnung bei angelegter Spannung. Erst durch die Absorption von Strahlung und die damit verbundene Erzeugung von Elektron-Loch-Paaren soll Leitfähigkeit hergestellt werden. Als Materialien eignen sich Germanium und Silizium. Silizium ist wegen seiner kleinen Kernladungszahl nur für relativ niedrige Gammaenergien geeignet, so dass im weiteren nur der im Versuch verwendete Germaniumdetektor besprochen wird.

Detektor mit intrinsischem Germanium (i-Ge-Detektor): Für ihn wird höchst reines Germanium mit einer Konzentration von elektrisch aktiven Verunreinigungen um $2 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ verwendet. Wenn das Material auch noch gekühlt wird (z.B. auf die Temperatur des flüssigen Stickstoffs von 77 K), so dass auch keine thermisch aktivierten Ladungsträger vorhanden sind, dann stellt das Material praktisch einen Isolator dar. Werden allerdings durch Strahlung

Ladungsträger erzeugt, dann fällt die über einen Arbeitswiderstand angelegte Spannung kurzzeitig ab. Dieser Spannungsimpuls wird zum Nachweis der Strahlung verwendet, da er zur Zahl der erzeugten Ladungsträger und damit im Fall des Photoeffektes der Gammaenergie proportional ist. Wegen der hohen Anforderung an die Reinheit des Materials kann man allerdings nur verhältnismäßig kleine Ge-Kristalle herstellen.

Ein Halbleiterdetektor bietet nun den Vorteil einer höheren Dichte des zu ionisierenden Materials als bei einem Gas was zu einer höheren Energieumsetzung führt, zum anderen ist die Ionisierungsenergie viel niedriger, was eine deutlich bessere Energieauflösung ermöglicht.

1.6 Mössbauereffekt

Der Mössbauereffekt bietet eine Reihe von Anwendungsmöglichkeiten in vielen Bereichen der Physik, so z.B. bei der Auflösung der Photonenfrequenz spezieller Kernübergänge bis hin zur natürlichen Linienbreite oder beim Nachweis von Eisenspuren in beliebigen Proben. Er existiert nur bei Festkörpern und nicht bei Flüssigkeiten oder Gasen und basiert im wesentlichen auf der diskreten Natur der Eigenschwingungen (Phononen) in einem Festkörper, wie in folgenden Abschnitten heuristisch dargelegt werden soll.

1.6.1 Linienverbreiterung bei γ -Strahlung

Analog zur natürlichen Linienbreite der emittierten Strahlung bei Elektronenübergängen in einem Atom wird die γ -Strahlung der angeregten Atomkerne physikalisch beschrieben, und zwar betrachten wir an dieser Stelle nur die natürliche Linienverbreiterung und Dopplerverbreiterung, denn meistens reicht die thermische Energie nicht aus, um eine Druckverbreiterung, wie im atomaren Fall, festzustellen, jedoch könnten solche Effekte in einem sehr heißen Plasma zu erwarten sein. Wir wollen mit natürlicher Linienbreite beginnen und merken zugleich an, dass zwei verschiedene Effekte zur Bildung der natürlichen Linienbreite beim Atomkern beitragen, zum einen die Abstrahlung eines γ -Quants und zum anderen die innere Umwandlung. Unter innerer Umwandlung (internal conversion) versteht man den Prozess, bei dem die Energie durch elektromagnetische Kräfteübertragung auf eines der Hüllenelektronen direkt übertragen wird und dieses dadurch aus dem Elektronenverband verbannt. Die natürliche Linienbreite $\Gamma = 2\Delta\omega$ mit $\Delta\omega$ als Halbwertsbreite, resultiert aus der spontanen Emission von γ -Strahlung und der inneren Umwandlungen bei internen Kernübergängen mit der dazugehörigen mittleren Lebensdauer τ . Da Γ allgemein als Zerfallswahrscheinlichkeit des betrachteten Kernübergangs gedeutet werden kann, muss sie als Summe der Beiträge aus der inneren Umwandlung Γ_{IC} und aus der γ -Emission Γ_γ darstellbar sein, so dass wir nach Einführung des Konversionskoeffizienten $\alpha = \frac{\Gamma_{IC}}{\Gamma_\gamma}$ der inneren Umwandlung, der heute im allgemeinen bekannt ist, die gesamte Linienbreite schreiben können über

$$\Gamma = \Gamma_{IC} + \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma(1 + \alpha) \quad (21)$$

Gemäß der Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \approx \frac{\hbar}{2}$ finden wir mit der $\Delta E = \hbar\Delta\omega$ für die natürliche Linienbreite

$$\tau\Gamma \approx 1 \quad (22)$$

womit eine Verbreiterung des Energieniveaus um die natürliche Linienbreite zu erwarten ist. Wie man aus phänomenologischen Betrachtungen einer zeitlich exponentiell abnehmenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Kerne im angeregten Niveau heraus ableiten kann, besitzt die natürliche Linienbreite für einen Übergang mit der Resonanzfrequenz ω ein Lorentzprofil

$$I(\omega') = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\omega' - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (23)$$

wobei $\int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega') d\omega'$ die Wahrscheinlichkeit angibt ein γ -Quant im Frequenzintervall $[\omega_1; \omega_2]$ für einen Kernübergang der Resonanzfrequenz ω zu messen. Die Normierung der obigen Wahrscheinlichkeit erstreckt sich über alle positiven und negativen Frequenzen, so dass unsere Normierungskonstante von der Resonanzfrequenz ω unabhängig ist.

Die Dopplerverbreiterung basiert auf der thermischen Bewegung der Kerne. Hier soll nur der Grundgedanke bei der Herleitung dieser skizziert werden. Dabei wollen wir davon ausgehen, dass unsere Atomkerne scharfes, monochromatisches Licht mit dem Wellenvektor \vec{k} emittieren. Bewegen sie sich mit einer Geschwindigkeit \vec{v} , so messen wir im nichtrelativistischen Fall in der Richtung \vec{k} die dopplerverschobene Frequenz¹:

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{c |\vec{k}|} \right) \quad (24)$$

Befinden sich unsere Atomkerne im thermischen Gleichgewicht, so folgt für die Atomkerne eines Gases, wie auch für die eines Festkörpers, dass deren Geschwindigkeiten \vec{v} nach Maxwell verteilt sind, was durch die normierte Verteilungsfunktion $P(\vec{v})$ ausgedrückt in allen Geschwindigkeitskomponenten wie folgt lautet:

$$P(\vec{v}) = \frac{e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2\pi k_B T}}}{\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2\pi k_B T}} d^3\vec{v}} \quad (25)$$

Der Einfachheit halber wollen wir die Beobachtungsrichtung \vec{k} als z-Achse unseres Koordinatensystems wählen, so dass unsere gemessene Frequenz nur von der Geschwindigkeitskomponente v_z abhängt. Wir finden also mit $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \vec{e}_z$ als Zusammenhang zwischen der für die Frequenzverschiebung $\omega - \omega'$ verantwortlichen Geschwindigkeitskomponente v_z und der Frequenz ω'

$$v_z(\omega') = \left(\frac{\omega'}{\omega} - 1 \right) c \quad (26)$$

¹Die hier angegebene Formel für die Dopplerverschiebung bezieht sich eigentlich auf einen bewegten Beobachter und eine ruhende Quelle, ist also für unseren Ansatz eigentlich nicht ganz korrekt; jedoch führt die korrekte Formel für eine bewegte Quelle und einen ruhenden Beobachter in der weiteren Rechnung auf eine nicht normierbare Verteilungsfunktion für die Frequenzen, so dass wir uns notgedrungen und im Wissen der gemachten, ohnehin nichtrelativistischen Näherung mit der angegebenen Formel zufrieden geben wollen

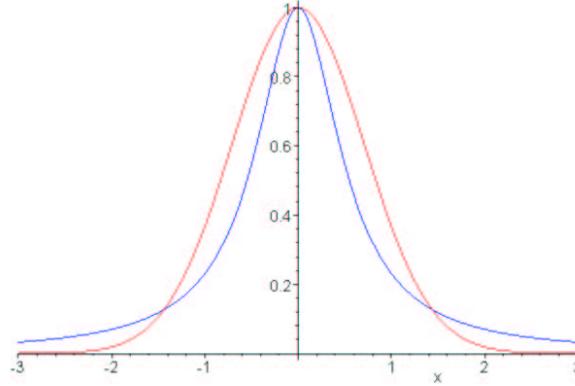


Abbildung 4: Die Graphen eines Gauß- (rot) und eines Lorentzprofils (blau) im Vergleich

was eingesetzt in obige Maxwellverteilung und nach Abintegration der nicht relevanten Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y die spektrale Verteilungsfunktion $S(\omega')$ bezüglich Frequenz ω' ergibt:

$$S(\omega') = \int_{\mathbb{R}^2} \int P(v_x, v_y, v_z(\omega')) dv_x dv_y = \frac{e^{-\frac{mc^2(\omega' - \omega)^2}{2\omega^2 k_B T}}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mc^2(\omega' - \omega)^2}{2\omega^2 k_B T}} d\omega'} = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \frac{c}{\omega} e^{-\frac{mc^2(\omega' - \omega)^2}{2\omega^2 k_B T}} \quad (27)$$

Diese beschreibt unsere Dopplerverbreiterung, welche die Form einer Gaußkurve mit einem Maximum bei $\omega' = \omega$ besitzt. Zu bemerken ist, dass aufgrund der sehr langen Lebensdauer der Anregungszustände der Kerne und der damit einhergehenden sehr geringen natürlichen Linienbreite die Dopplerverbreiterung den Hauptanteil der gewöhnlich messbaren Linienbreite eines Kernübergangs ausmacht. Der Mössbauereffekt jedoch ermöglicht die Dopplerverbreiterung beim Messen der Linienbreite zu umgehen. Abbildung 4 zeigt zur Veranschaulichung ein Gauß- und ein Lorentzprofil.

1.6.2 Betrachtung einzelner Atome

Wir wollen im folgenden den Emissionsprozess für einen Atomkern unter dem Gesichtspunkt der Impuls- und Energieerhaltung etwas näher erläutern. Aufgrund der hohen γ -Quantenenergien ist es nicht mehr zulässig, den Atomkern nach dem Emissionsprozess als ruhend zu betrachten. Vielmehr muss für einen Atomkern der Masse M und der Anfangsgeschwindigkeit \vec{v} (thermische Bewegung), welcher sich vor der Emission im angeregten Zustand der Energie E_a befand, nach Abstrahlung eines γ -Quants der Frequenz ω' und des Wellenvektors \vec{k}' folgendes Gleichungssystem der Impuls- und Energieerhaltung im hier betrachteten, nichtrelativistischen Fall erfüllt sein:

$$M\vec{v} = \hbar\vec{k}' + M\vec{v}' \quad (28)$$

$$E_a + \frac{1}{2}M\vec{v}^2 = E_g + \frac{1}{2}M\vec{v}'^2 + \hbar\omega' \quad (29)$$

Dabei befindet sich der Atomkern nach Emission im Grundzustand E_g und besitzt die Geschwindigkeit \vec{v}' . Die Differenz $\frac{E_a - E_g}{\hbar} = \omega$ entspricht der Resonanzfrequenz eines ruhenden Atomkerns bei der Absorption. Einsetzen der Gleichung 28 in die Gleichung 29 und Auflösen nach ω' liefert uns folgende Beziehung

$$\hbar\omega' = \hbar\omega + \hbar\vec{v}'\vec{k}' - \frac{\hbar^2}{2M}\vec{k}'^2 \quad (30)$$

Die tatsächlich ausgesandte Frequenz ω' unterscheidet sich laut [2] durch den sogenannten Rückstoßeffekt $-\frac{\hbar^2}{2M}\vec{k}'^2$ und durch die geschwindigkeitsabhängige Dopplerverschiebung $\hbar\vec{v}'\vec{k}'$ von der Resonanzfrequenz ω . Aber unter Berücksichtigung der Dispersionsrelation

$$|\vec{k}'| = \frac{\omega'}{c} \quad (31)$$

mit c als der Vakuumlichtgeschwindigkeit, erhalten wir mit $\vec{v}'\vec{k}' = \frac{v\omega}{c}\cos(\vartheta)$ nach Lösen der quadratischen Gleichung für die ausgesandte Frequenz ω'

$$\hbar\omega = Mc^2 \left(\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\cos(\vartheta)\right)^2 + \frac{2\hbar\omega}{Mc^2}} - \left(1 - \frac{v}{c}\cos(\vartheta)\right) \right) \quad (32)$$

Verallgemeinern wir unsere Betrachtungen auf ein Ensemble von Atomen, die im thermodynamischen Gleichgewicht in ihrer Geschwindigkeit \vec{v} gemäß $P(\vec{v})$ maxwellverteilt sind, so finden wir das entsprechende Frequenzprofil $S_a(\omega')$ indem wir analog zu oben, die Gleichung 30 nach $v_z = v\cos(\vartheta)$ auflösen (wir gehen wieder von einer Beobachtungsrichtung entlang der z-Achse aus) und in die Maxwellverteilung 25 einsetzen, unter der Berücksichtigung, das für $\omega' \in (0, \infty)$ der gesamte Geschwindigkeitsbereich $v_z \in (-\infty; \infty)$ abgedeckt ist

$$S_a(\omega') = \frac{e^{-\frac{Mc^2}{2k_b T} \left[1 - \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\hbar\omega'}{2Mc^2}\right]^2}}{\int_0^\infty e^{-\frac{Mc^2}{2k_b T} \left[1 - \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\hbar\omega'}{2Mc^2}\right]^2} d\omega'} \quad (33)$$

Das daraus resultierende Frequenzprofil ist in diesem Fall zwar nicht gaußförmig ausgeprägt, besitzt aber dennoch eine im Vergleich zur natürlichen Linienbreite aufgeweitete Form. Außerdem ist das Maximum noch bezüglich der Resonanzfrequenz ω zu kleineren Frequenzen hin verschoben, was sich natürlich durch den vom Atomkern aufgenommenen Rückstoßimpuls erklären lässt. Abbildung 5 zeigt die Form eines solchen numerisch berechneten Profils mit der willkürlich gewählten Resonanzfrequenz $\omega = 1$.

Es sei noch bemerkt, dass für den Grenzfall $M \rightarrow \infty$ und $v \ll c$ der Rückstoßeffekt-Term in Gleichung 30 verschwindet, so das wir die Form

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - \frac{v}{c}\cos(\vartheta)} \approx \omega \left(1 - \frac{v}{c}\cos(\vartheta) + \dots\right) \quad (34)$$

erhalten, die eingesetzt in die obige Maxwellverteilungsfunktion $P(\vec{v})$ unser bekanntes, unverschobenes Gaußprofil ergibt.

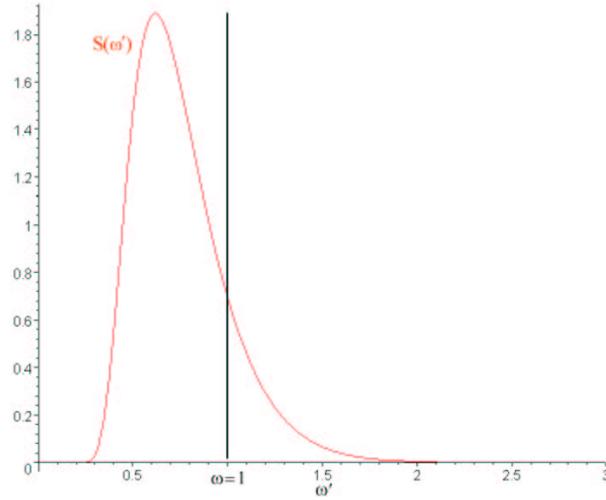


Abbildung 5: Frequenzprofil $S(\omega')$ eines einatomigen Gases unter der Berücksichtigung des Rückstoßeffekts und der Maxwellverteilung der Geschwindigkeit

1.6.3 Betrachtung zweiatomiger Moleküle

Um das Spektrum eines zweiatomigen Moleküls zu berechnen müssen nun zusätzlich zu den translatorischen auch rotatorische und Schwingungsfreiheitsgrade berücksichtigt werden. Betrachtet man die Schwingungen des Moleküls als harmonisch mit der Resonanzfrequenz ω_S und bezeichnet man mit θ das Trägheitsmoment um die ausgezeichnete Hauptträgheitsachse, so lauten die Energieeigenwerte der Rotation E_{Rot} und der Eigenschwingungen E_{Schw} :

$$E_{Schw}(n) = \hbar\omega_S \left(n + \frac{1}{2} \right), n \in \mathbb{N} \quad (35)$$

$$E_{Rot}(l) = \frac{l(l+1)}{2\theta}, l \in \mathbb{N} \quad (36)$$

Liegt in unserem Molekül nun zu Anfang einer der beiden Kerne im angeregten Zustand der Energie E_a vor und besitzt das Molekül vorher den Schwingungszustand $E_{Schw}(n)$ und den Rotationszustand $E_{Rot}(l)$, so lauten Energie- und Impulserhaltung nach Abstrahlung eines γ -Quants der Energie $\hbar\omega'$ verglichen mit den Gleichungen 28 und 29, wenn alle Größen nach der Emission mit einem Strich gekennzeichnet sein sollen

$$M\vec{v} = M\vec{v}' + \hbar\vec{k}' \quad (37)$$

$$\frac{1}{2}M\vec{v}^2 + E_a + E_{Schw}(n) + E_{Rot}(l) = \frac{1}{2}M\vec{v}'^2 + E_g + E_{Schw}(n') + E_{Rot}(l') + \hbar\omega' \quad (38)$$

Dabei wurde an dieser Stelle von der Drehimpulserhaltung abgesehen. Mit

$$\Delta E(n, n', l, l') = E_{Schw}(n) + E_{Rot}(l) - E_{Schw}(n') - E_{Rot}(l') \quad (39)$$

lautet dann das Analogon zur Gleichung 30

$$\hbar\omega' = \hbar\omega + \hbar\vec{v}\vec{k}' - \frac{\hbar^2}{2M}\vec{k}'^2 + \Delta E. \quad (40)$$

Hiermit erhalten wir wie oben ein Frequenzprofil $S_{nl'n'l'}(\omega')$ für ein zweiatomiges Molekül, wenn wir uns auf Moleküle beschränken, die einen Übergang in ihrer Rotationsenergie von $E_{Rot}(l) \rightarrow E_{Rot}(l')$ und in ihrer Schwingungsenergie von $E_{Schw}(n) \rightarrow E_{Schw}(n')$ vollzogen haben, das folgende Form besitzt

$$S_{nl'n'l'}(\omega') = \frac{e^{-\frac{Mc^2}{2k_b T} \left[1 - \frac{\omega + \Delta E(n,l,n',l')/\hbar}{\omega'} + \frac{\hbar\omega'}{2Mc^2} \right]^2}}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{Mc^2}{2k_b T} \left[1 - \frac{\omega + \Delta E(n,l,n',l')/\hbar}{\omega'} + \frac{\hbar\omega'}{2Mc^2} \right]^2} d\omega'} \quad (41)$$

Sei mit $g(T, n, l)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, bei der Temperatur T ein Molekül im Zustand n, l vor der Emission vorzufinden und sei ferner mit $w(n, l, n', l')$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, das ausgehend vom Zustand n, l das Molekül nach dem Emissionsprozess in den Zustand n', l' übergeht. Die Wahrscheinlichkeiten sind dabei wie folgt über

$$\sum_{n,l} g(T, n, l) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{n',l'} w(n, l, n', l') = 1 \quad (42)$$

normiert. Dann lautet unser gesamtes Frequenzprofil $S_m(\omega')$ bei dem alle Rotations- und Schwingungsübergänge des Moleküls beim Emissionsprozess mit berücksichtigt werden:

$$S_m(\omega') = \sum_{n,l,n',l'} g(T, n, l) \cdot w(n, l, n', l') \cdot S_{nl'n'l'}(\omega') \quad (43)$$

Abbildung 6 soll ein solches Frequenzprofil $S(\omega')$ in stark vereinfachter Form etwas veranschaulichen und zeigt zwei verschiedene, numerisch berechnete Frequenzprofile. Der rote Graph zeigt dabei ein schematisches Frequenzprofil für $n = n' = 0$ mit unterschiedlichen Rotationsübergängen, wobei die Rotationsquantenzahlen l vor und l' nach dem Emissionsprozess in den roten Klammern gemäß (l, l') notiert sind. Entsprechend zeigt der schwarze Graph ein Frequenzprofil bei dem lediglich eine Schwingungszustandänderung berücksichtigt wurde, also $l = l' = 0$ und die Schwingungszustandquantenzahlen gemäß (n, n') in den schwarzen Klammern. Die Resonanzfrequenz wurde o.B.d.A. zu $\omega = 5$ gewählt. In dem Fall von Abbildung 6, bei dem wir die Masse stark vergrößert haben, ist neben der noch immer auftretenden Linksverschiebung des Hauptpeaks (0,0) zu erkennen, dass die Linienform für größere Massen sich der einer Gaußschen Glockenkurve annähert, jedoch die Linienbreite aufgrund der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung zu geringeren Frequenzen hin abnimmt. Es stellt sich nun die Frage, welcher Anteil der Gesamtintensität im Hauptpeak vorhanden ist. Diesen Anteil erhalten wir, indem wir uns klarmachen, dass alle Emissionsprozesse bei denen weder die Rotationsquantenzahl, noch die Schwingungsquantenzahl ändert, zum Hauptpeak beitragen.

Spalten wir also das Frequenzprofil wie folgt in zwei Anteile auf

$$S_m(\omega') = \sum_{n,l,n',l'; n \neq n', l \neq l'} g(T, n, l) \cdot w(n, l, n', l') \cdot S_{nl'n'l'}(\omega') + \sum_{n,l} g(T, n, l) \cdot w(n, l, n', l') \cdot S_{nl'n'l'}(\omega') \quad (44)$$

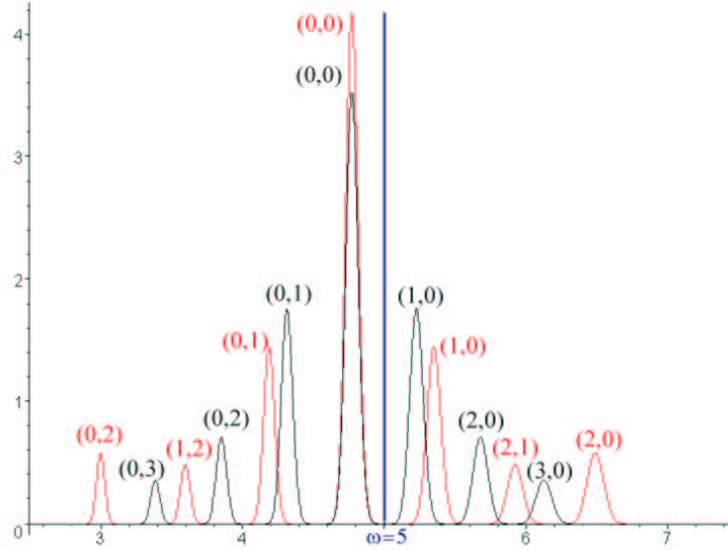


Abbildung 6: Frequenzprofile $S(\omega')$ eines zweiatomigen Molekylgases unter der Berücksichtigung des Rückstoßeffekts, der Maxwellverteilung der Geschwindigkeit, des Beitrages von Rotationsenergie (rot) und der Kopplung an die Schwingungseigenzustände

so können wir den hinteren Term gerade als den Beitrag zum Hauptpeak identifizieren. Jedoch reduziert sich $S_{nl'n'}(\omega')$ in diesem Fall zu $S_a(\omega')$ und ist gänzlich von l und n unabhängig. Definieren wir uns nun die temperaturabhängige Größe

$$f(T) = \sum_{n,l} g(T, n, l) \cdot w(n, l, n', l') \quad (45)$$

die als Debye-Waller-Faktor des zweiatomigen Moleküls bezeichnet wird, so lässt sich der Anteil der Gesamtintensität, welcher sich im Hauptpeak befindet, gerade durch diese Größe $f(T)$ beschreiben und wir erhalten für den Anteil des Hauptpeaks im Frequenzprofil die vereinfachte Form

$$S_m(\omega') = \sum_{n,l,n',l'; n \neq n', l \neq l'} g(T, n, l) \cdot w(n, l, n', l') \cdot S_{nl'n'}(\omega') + f(T) \quad (46)$$

Allgemein ist also zu beobachten, dass verglichen mit einem einatomigen Gas, das Molekylgas aufgrund der größeren Masse der Moleküle eine geringere Verschiebung des Frequenzprofilmaximums und eine geringere Linienbreite aufweist. Die gemachten Beobachtungen weisen darauf hin, dass die Rückstoßverschiebung durch eine weitere Vergrößerung der Masse, beispielsweise für einen Kristall, aufgehoben werden kann, genauso wie die Dopplerverbreiterung. Dies wollen wir im nächsten Abschnitt kurz ansprechen.

1.6.4 Betrachtung eines Kristalls

Unser ruhender Kristall besitze N Atome, die gegeneinander Schwingungen ausführen können (thermische Bewegung der Atomkerne) und habe die Masse M . Da der Gitterabstand zweier

Atome endlich ist, können nur endlich viele stehende Wellen im Kristall ausgebildet werden, da ja die Wellenlänge der Eigenschwingungen nicht den Gitterabstand unterschreiten darf. Ein Kristall aus N Atomen besitzt $3N$ Freiheitsgrade, von denen sechs zur Beschreibung der makroskopischen Translation und Rotation entfallen, so dass eigentlich $3N - 6$ Freiheitsgrade verbleiben. Jedoch werden in der Behandlung eines endlichen Gitters periodische Randbedingungen an dessen Enden gefordert, die wieder zu einer Rechenweise mit $3N$ Freiheitsgraden für das Gitter führen. Quantenmechanisch werden diesen $s = 1 \dots 3N$ Eigenschwingungen des Gitters die charakteristischen Gitterfrequenzen Ω_s und die Besetzungszahlen n_s zugeordnet. Die Angabe aller dieser n_s legt dann einen Gitterzustand G erst eindeutig fest. Setzt man alle Gitteratome in ein harmonisches Oszillatorpotential, so erhält man hieraus die innere Kristallenergie (aufgrund der thermischen Eigenschwingungen der Oszillatoren) für den Gitterzustand G :

$$E(G) = \sum_{s=1}^{3N} \hbar \Omega_s \left(n_s + \frac{1}{2} \right) \quad (47)$$

Wir betrachten nun wieder den Fall, indem sich ein Atomkern im Gitter im angeregten Zustand der Energie E_a befindet und nach Emission eines γ -Quants der Energie $\hbar\omega'$ in den Grundzustand übergeht, wobei beim Emissionsprozess ebenfalls eine Änderung des Schwingungszustandes des Gitters mit einhergehen kann. Sei mit $\Delta E(G, G') = E(G) - E(G')$ die Energieänderung beim Wechsel des Schwingungszustandes bezeichnet, so finden wir ausgehend von den Gleichungen 28 und 29 für einen abstrahlenden Kristall die Impuls und Energieerhaltungsgleichungen

$$M\vec{v} = M\vec{v}' + \hbar\vec{k}' \quad (48)$$

$$\frac{1}{2}M\vec{v}^2 + E_a + E(G) = \frac{1}{2}M\vec{v}'^2 + E_g + E(G') + \hbar\omega' \quad (49)$$

welche sich zu folgender Gleichung umformen lassen

$$\hbar\omega' = \hbar\omega + \hbar\vec{v}\vec{k}' - \frac{\hbar^2}{2M}\vec{k}'^2 + \Delta E(G, G'). \quad (50)$$

Da ein makroskopischer Kristall verglichen mit einem Atomkern eine sehr große Masse besitzt, die eine Vernachlässigung des Rückstoßterms $-\frac{\hbar^2}{2M}\vec{k}'^2$ nahe legt, und wir an dieser Stelle noch von einem anfangs ruhenden Kristall mit $\vec{v} = 0$ ausgehen wollen, womit auch die Dopplerverschiebung $\hbar\vec{v}\vec{k}'$ entfällt, vereinfacht sich letzte Gleichung zu

$$\hbar\omega' = \hbar\omega + \Delta E(G, G'). \quad (51)$$

Damit erkennt man, dass die Frequenz ω' des vom Kristall abgestrahlten γ -Quants nur noch von einer Zustandsänderung des Kristalls abhängt, jedoch eine Linienverbreiterung durch die Dopplerverschiebung analog zum Atomgas oder eine Verschiebung der Resonanzlinie aufgrund des Rückstoßterms durch die Einbettung des emittierenden Atomkerns in einen Kristall aufgehoben wurde. Würde nun beim Emissionsprozess niemals eine Änderung der Schwingungsenergien des Kristall eintreten, so würde man die aus dem Kristall emittierten γ -Quanten nur mit der natürlichen Linienbreite Γ behaftet detektieren. Da aber im allgemeinen beim Emittieren eine

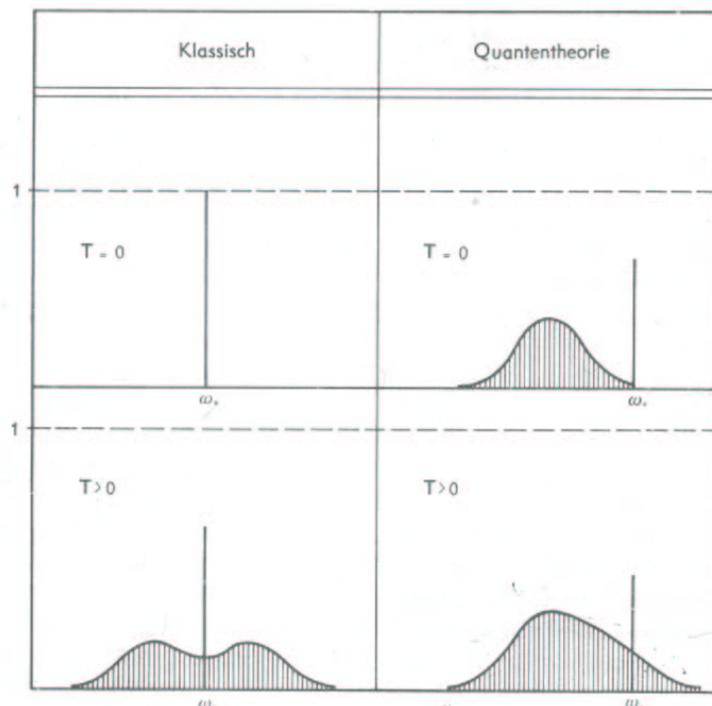


Abbildung 7: links: klassische Theorie des Mößbauereffekts mit symmetrischem Nebenlinienspektrum rechts: quantenmechanische Theorie des Mößbauereffekts mit asymmetrischen Nebenlinienspektrum [2]

Änderung des Schwingungszustandes eintritt und die einzelnen Energieniveaus E_G der Schwingungszustände sehr dicht beieinander liegen, misst man statt dessen ein quasikontinuierliches Frequenzspektrum der γ -Quanten.

Es war nun als erster Mößbauer, der 1957 in seiner Doktorarbeit am ^{191}Ir -Isotop die mit der natürlichen Linienbreite behaftete Hauptlinie, die den γ -Quanten zugeordnet wird, bei denen beim Emissionsprozess keine Änderung des Gitterzustandes einherging, aus dem quasikontinuierlichen Frequenzspektrum heraus entdeckte. Dass es überhaupt möglich ist, die Hauptlinie für $\Delta E(G, G') = 0$ zu detektieren, liegt an dem recht großen Debye-Waller-Faktor $f(T)$ der Kristalle, die sogenannte Mößbauerkerne (z.B. ^{57}Fe ; ^{61}Ni , u.a.) enthalten. Abbildung 7 zeigt das Herausheben der Hauptlinie aus dem quasikontinuierlichen Frequenzspektrum im Hinblick auf verschiedene Beschreibungsmodelle und für verschiedene Temperaturen. Sei $g(T, G)$, ähnlich wie beim zweiatomigen Molekül, die Wahrscheinlichkeit, dass der Schwingungszustand G im Kristall vor der Emission bei der Temperatur T vorliegt und sei $w(G, G')$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand G beim Emissionsprozess in den Zustand G' übergeht. Die temperaturabhängige Besetzungswahrscheinlichkeit $\bar{g}(T, n_s)$ einer einzelnen Eigenschwingung mit der Besetzungszahl

n_s und der Schwingungsenergie $E_s = \hbar\Omega_s(n_s + 1/2)$ gehorcht dann einer Boltzmannverteilung

$$\bar{g}(T, n_s) = \frac{e^{-\frac{\hbar\Omega_s}{k_B T}(n_s+1/2)}}{\sum_{n_s=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\Omega_s}{k_B T}(n_s+1/2)}} = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\Omega_s}{k_B T}}\right) \cdot e^{-\frac{\hbar\Omega_s}{k_B T} \cdot n_s} = 2 \sinh\left(\frac{\hbar\Omega_s}{2k_B T}\right) \cdot e^{-\frac{\hbar\Omega_s}{k_B T}(n_s+1/2)}, \quad (52)$$

und da die einzelnen Eigenschwingungen als unabhängig voneinander zu betrachten sind, folgt hieraus die Gesamtbesetzungswahrscheinlichkeit vor der Emission als Produkt aller einzelnen Besetzungswahrscheinlichkeiten $\bar{g}(T, n_s)$ über

$$g(T, G) = \prod_{s=1}^{3N} \bar{g}(T, n_s) = 2^{3N} e^{-\frac{E(G)}{k_B T}} \prod_{s=1}^{3N} \sinh\left(\frac{\hbar\Omega_s}{2k_B T}\right). \quad (53)$$

Die Normierung ist dabei gemäß

$$\sum_G g(T, G) = \sum_{n_1 \dots n_{3N}=1}^{\infty} \prod_{s=1}^{3N} \bar{g}(T, n_s) = \prod_{s=1}^{3N} \left(\sum_{n_s=1}^{\infty} \bar{g}(T, n_s) \right) \quad (54)$$

gewährleistet. Die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten $w(G, G')$ erfolgt über eine quantenelektrodynamische Rechnung. Dann lautet der Debye-Waller-Faktor $f(T)$ für einen Kristall, der wie oben angibt, welcher Anteil der gesamt abgestrahlten γ -Quanten ohne eine Änderung des Gitterzustandes stattfand

$$f(T) = \sum_G g(T, G) w(G, G'). \quad (55)$$

Allgemein stellt man fest, dass der Debye-Waller-Faktor für Mössbauerkerne zu kleineren Temperaturen hin steigt und für ^{57}Fe -Kerne bereits bei Zimmertemperatur einen Wert hat von etwa $f(20^\circ\text{C}) = 0,8$, was also besagt, dass etwa 80% aller ausgesandten γ -Quanten zur Hauptlinie (Mössbauerlinie) gehören. Nicht jedes Isotop ist für den Mössbauereffekt geeignet, sondern Mössbauerkerne sollten folgende Eigenschaften erfüllen:

- Ein Mössbauerkern sollte möglichst nicht radioaktiv sein, denn dadurch würde das Rausch-Signal-Verhältnis im Detektor erheblich verschlechtert.
- Der untersuchte γ -Übergang sollte in den Grundzustand führen, da die Absorption nur aus dem Grundzustand möglich ist, deren Notwendigkeit wir später noch aufzeigen werden.
- Der Debye-Waller-Faktor sollte mindestens einige Prozent betragen, um die Hauptlinie beobachten zu können.

1.6.5 Nachweismöglichkeiten der Resonanzabsorption

Zum experimentellen Nachweis der Mössbauerlinie wird die Kernresonanzfluoreszenz angewendet. Hierzu benötigt man neben der γ -Quelle Q eines Mössbauerisotops einen Absorber A , der

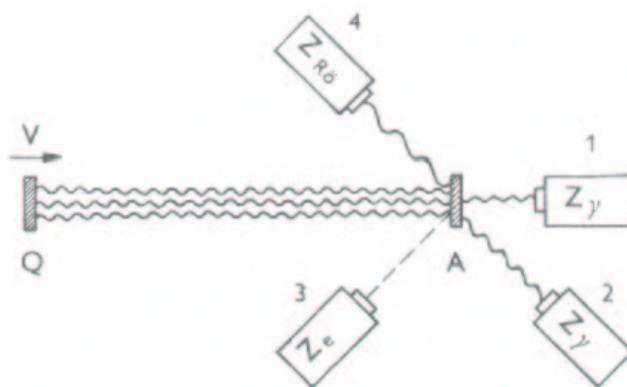


Abbildung 8: Verschiedene Möglichkeiten, um den Mössbauereffekt zu beobachten

dieselbe Isotopenart wie Q enthält. Beidesmal muss das Isotop in einen Kristall eingebunden sein. Die von Q in Ruhe ausgesandten γ -Quanten besitzen dieselbe Resonanzfrequenz wie die Isotope in A , und können diese deshalb vom Grundzustand in den angeregten Zustand über die sogenannte Resonanzabsorption anheben. Die so angeregten Isotopenkerne kehren bald danach durch innere Umwandlung oder durch Reemission eines γ -Quants in den Grundzustand zurück. Aufgrund der sehr kleinen natürlichen Linienbreite, ist eine Störung der Resonanzabsorption durch beispielsweise Bewegen der Quellen und einer damit einhergehenden Dopplerverschiebung sehr schnell erreicht. Für das ^{57}Fe -Isotop reicht beispielsweise eine Geschwindigkeit von wenigen cm/s aus, um die Resonanzabsorption zu unterdrücken. Es stellt sich heraus, dass diese Methode der Bewegung der Quelle dazu geeignet ist, die natürliche Linienbreite des Isotops zu bestimmen. Dies wollen im Folgenden etwas näher ausführen, doch sollen zuvor die verschiedenen Detektionsmöglichkeiten kurz angedeutet werden. Abbildung 8 zeigt vier übliche Methoden, den Mössbauereffekt nachzuweisen. Bei Methode 1 bringt man den γ -Detektor direkt hinter dem Absorber an, und misst die Anzahl der eintreffenden γ -Quanten in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v . Für $v = 0$ ist Resonanzabsorption zu erwarten, so dass hier die wenigsten γ -Quanten am Detektor ankommen. Bei Methode 2 ist der γ -Detektor seitlich zum Absorber A angebracht und misst die von A reemittierten γ -Quanten. Hier ist für $v = 0$ ein Maximum in der Anzahl der detektierten γ -Quanten zu erwarten. Bei der Methode 3 zählt man die vom Absorber durch innere Umwandlung herausgeschlagenen Konversionselektronen und bei Methode 4 misst man die charakteristische Röntgenstrahlung, die entsteht, wenn das Loch des Konversionselektrons in der K - oder L -Schale durch ein äußeres Elektron wieder aufgefüllt. In unserem Versuch haben wir die Methode 1 zum Nachweis des Mössbauereffekts angewendet. Die Hauptlinie besitzt das Lorentzprofil $I(\omega')$. Wollen wir nun die Wahrscheinlichkeitsdichte berechnen, ein γ -Quant aus der Hauptlinie bei der Frequenz ω' anzutreffen, so haben wir das Lorentzprofil mit dem Debye-Waller-Faktor $f(T)$ des Kristalls der Quelle zu multiplizieren und finden

$$I_H(\omega') = \frac{1}{\pi} \frac{f(T) \left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{(\omega' - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (56)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges γ -Quant beim Durchlaufen des Absorbers der Dicke r absorbiert wird, ist durch das Verhältnis der austretenden zur eintretenden Strahlung gegeben (s.o.) und folgt dem exponentiellen Gesetz

$$D(\omega') = e^{-\mu r} = e^{-nr(\bar{\sigma} + \sigma(\omega'))} \quad (57)$$

wobei n wie oben die Teilchendichte, $\bar{\sigma} = \sigma_{Ph} + \sigma_{Co} + \sigma_{Pa} + \sigma_{Re}$ den hier nahezu frequenzunabhängigen Anteil des Wirkungsquerschnittes (σ_{Re} meint den frequenzunabhängigen Resonanzquerschnitt aller Nebenlinien, bei denen eine Zustandsänderung des Gitters beim Absorptionsprozess einhergegangen ist und die in der Nähe der Hauptlinie einen nahezu konstantes Frequenzuntergrundprofil bilden) und $\sigma(\omega')$ den neuen, stark frequenzabhängigen Anteil des Resonanzquerschnittes der Hauptlinie bedeuten. Der Resonanzquerschnitt $\sigma(\omega')$ berücksichtigt die steigende Wahrscheinlichkeit der Absorption im Falle gleicher Resonanzfrequenzen von Quelle und Absorber und muss die Form eines Lorentzprofils haben, da der Absorptionsprozess aus einem Emissionsprozess durch eine Zeitumkehr hervorgeht. Die vollständige Theorie der Resonanzabsorption liefert den folgenden Ausdruck für die Resonanzabsorption der Hauptlinie

$$\sigma(\omega') = \frac{\beta f'(T) \sigma_0 \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(\omega' - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (58)$$

$$\text{mit } \sigma_0 = \frac{2\pi}{\omega^2} \frac{1}{1 + \alpha} \frac{2j_a + 1}{1j_g + 1} \quad (59)$$

wobei $\beta \in [0, 1]$ die Isotopenhäufigkeit, $f'(T)$ den Debye-Waller-Faktor des Absorbers, j_a und j_g die Gesamtdrehimpulsquantenzahlen für den angeregten und Grundzustand und α den Konversionskoeffizienten meint. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein γ -Quant absorbiert wird durch $1 - D(\omega')$ gegeben.

Für den von uns ebenso zu betrachtenden Fall, dass die Resonanzfrequenz des Absorber ω in mehrere Frequenzen ω_i ($i = 1..k$) aufspaltet, wie beispielsweise bei der Hyperfeinstrukturaufspaltung aufgrund innerer Magnetfelder des Kristalls (Zeemaneffekt), muss der $\sigma(\omega')$ -Term durch die Summe

$$\sigma(\omega') = \sum_{i=1}^k \frac{\beta f'(T) \sigma_0^{(i)} \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(\omega' - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (60)$$

ersetzt werden. Dabei ist zu beachten, dass im Fall der Hyperfeinstrukturaufspaltung alle Linien dieselbe Linienbreite Γ besitzen und die $\sigma^{(i)}$ eine Gewichtung der einzelnen Linien berücksichtigen. Dann erhalten wir als Wahrscheinlichkeit, dass ein γ -Quant aus dem Hauptpeak den Absorber durchdringt

$$W(\omega, \omega_i) = \int_{-\infty}^{\infty} I_H(\omega') D(\omega') d\omega' = f(T) e^{-nr\bar{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{\pi} \left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{(\omega' - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} e^{-\sum_{i=1}^k \frac{nr\beta f'(T) \sigma_0^{(i)} \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(\omega' - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}} d\omega' \quad (61)$$

Wollen wir nun diese Wahrscheinlichkeit für den Fall einer bewegten Quelle berechnen, so haben wir lediglich die Resonanzfrequenz ω der Quelle durch die dopplerverschobene Frequenz

$\omega_q = \omega(1 + v/c)$ zu ersetzen. Das Integral $W(\omega_q, \omega_i)$ besitzt keine elementare Lösungsformel, jedoch können für sehr kleine Dicken r des Absorbers die einzelnen Exponentialfunktionen nach Taylor entwickelt werden, wobei wir hier alle Terme bis zur zweiter Ordnung berücksichtigt

$$\prod_{i=1}^k e^{-\frac{l_0^{(i)}(\frac{\Gamma}{2})}{(\omega' - \omega)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}} \approx 1 - \sum_{i=1}^k \frac{l_0^{(i)}(\frac{\Gamma}{2})}{(\omega' - \omega)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{l_0^{(i)} l_0^{(j)} (\frac{\Gamma}{2})^4}{\left[(\omega' - \omega_i)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2 \right] \left[(\omega' - \omega_j)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2 \right]}, \quad (62)$$

und zur Abkürzung die Konstante

$$l_0^{(i)} = nr\beta f'(T)\sigma_0^{(i)} \quad (63)$$

eingeführt haben. Damit lässt sich unser Integral in drei Summanden aufspalten:

$$W(\omega_q, \omega_i) = W_1 + W_2 + W_3 \quad (64)$$

Für den ersten Summanden erhalten wir einfach

$$W_1 = f(T)e^{-nr\bar{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{\pi}(\frac{\Gamma}{2})}{(\omega' - \omega_q)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} d\omega' = f(T)e^{-nr\bar{\sigma}}. \quad (65)$$

Mit Hilfe des Residuumsatzes lassen sich dann die beiden anderen Summanden berechnen, wobei beim dritten Summand zu beachten ist, dass die Fälle $i = j$ und $i \neq j$ bei der Berechnung der Residuen zu unterscheiden sind. Glücklicherweise stellt sich nach der Rechnung heraus, dass der Fall $i = j$ als Spezialfall in der Formel für $i \neq j$ enthalten ist, so dass unsere beiden Summanden wie folgt lauten:

$$W_2 = -\frac{1}{2}\Gamma^2 f(T)e^{-nr\bar{\sigma}} \sum_{i=1}^k \frac{l_0^i}{(\omega_q - \omega_i)^2 + \Gamma^2} \quad (66)$$

$$W_3 = \frac{1}{32}\Gamma^4 f(T)e^{-nr\bar{\sigma}} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{l_0^i l_0^j [(\omega_q - \omega_i)^2 + (\omega_q - \omega_j)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2 + 6\Gamma^2]}{[(\omega_q - \omega_i)^2 + \Gamma^2][(\omega_q - \omega_j)^2 + \Gamma^2][(\omega_j - \omega_i)^2 + \Gamma^2]} \quad (67)$$

Für den einfachsten Fall $k = 1$, bei dem Absorber und Quelle die gleiche Resonanzfrequenz ω besitzen, reduziert sich unsere Wahrscheinlichkeit W mit dopplerverschobener Quellenfrequenz $\omega_q = \omega(1 + v/c)$ zu

$$W(\omega_q, \omega) = \widetilde{W}(v, \omega) = f(T)e^{-nr\bar{\sigma}} \left(1 - \frac{1}{2}\Gamma^2 l_0 \frac{1}{(\omega v/c)^2 + \Gamma^2} + \frac{1}{16}\Gamma^2 l_0^2 \frac{3\Gamma^2 + (\omega v/c)^2}{[(\omega v/c)^2 + \Gamma^2]^2} \right) \quad (68)$$

Betrachten wir nun die Wahrscheinlichkeit W_N , dass ein γ -Quant aus der Nebenlinie durch den Absorber hindurch gelangt, so erhalten wir hierfür aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt ein γ -Quant der Nebenlinie abgestrahlt wird ($1 - f(T)$) und der Wahrscheinlichkeit, dass dieses nicht absorbiert wird $e^{-nr\bar{\sigma}}$, wobei hier der Resonanzterm $\sigma(\omega')$ des Hauptpeaks vernachlässigt werden kann, den Ausdruck

$$W_N = (1 - f(T))e^{-nr\bar{\sigma}} \quad (69)$$

Wir suchen nun nach einer Formel, die uns die Wahrscheinlichkeit angibt, bei der Geschwindigkeit v der Quelle im Detektor ein beliebiges γ -Quant zu messen, das sowohl aus der Hauptlinie als auch aus der Nebenlinie stammen kann. Da die oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten W_N und $\widetilde{W}(v, \omega)$ als voneinander unabhängig betrachtet werden können, erhalten wir unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit, die üblicherweise als Zählrate $Z(v)$ bezeichnet wird, als die Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten

$$Z(v) = W_N + \widetilde{W}(v, \omega) \quad (70)$$

$$= e^{-nr\bar{\sigma}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{2} f(T) l_0 \frac{1}{(\omega v/c)^2 + \Gamma^2} + \frac{1}{16} \Gamma^2 f(T) l_0^2 \frac{3\Gamma^2 + (\omega v/c)^2}{[(\omega v/c)^2 + \Gamma^2]^2} \right). \quad (71)$$

Wir sehen, dass $Z(v)$ für $v \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert

$$Z(\infty) = e^{-nr\bar{\sigma}} \quad (72)$$

geht. Durch unsere gemachten Näherungen sehen wir, dass sich unsere gesuchte Zählrate ausdrücken lässt durch Lorentzprofile bis zur zweiten Ordnung, so dass wir unter der Einführung folgender Konstante

$$\Delta v = \frac{\Gamma c}{\omega} \quad (73)$$

die Zählrate schreiben können als

$$Z(v) = Z(\infty) \left(1 - \frac{\Delta v^2}{2} f(T) \frac{l_0}{v^2 + \Delta v^2} + \frac{\Delta v^2}{16} f(T) \frac{l_0^2 (3\Delta v^2 + v^2)}{[v^2 + \Delta v^2]^2} \right). \quad (74)$$

Mit Hilfe dieser Formel wollen wir unsere gemessenen Zählraten zur Bestimmung von Δv und somit zur Bestimmung der natürlichen Linienbreite Γ verwenden. $Z(v) \cdot M$ mit M als Anzahl aller detektierten Photonen ergibt als Schaubild das sogenannte Mössbauerspektrum.

1.6.6 Hyperfeinwechselwirkungen

Wegen der geringen Linienbreite der Mössbauerlinie genügt bereits eine geringe Verschiebung der Energie von ($\approx 5 * 10^{-8} eV$), um eine Resonanzabsorption zu verhindern. Die folgenden drei Effekte können für eine Verschiebung in dieser Größenordnung verantwortlich sein.

1. magnetische Hyperfeinstrukturaufspaltung
2. elektrische Quadrupolaufspaltung
3. Isomerieverschiebung

Die Magnetische Hyperfeinstrukturaufspaltung Die Wechselwirkung $-\vec{\mu} \circ \vec{B}$ des magnetischen Dipolmomentes $\vec{\mu}$ mit einem magnetischen Feld \vec{B} führt zu einer äquidistanten Aufspaltung der Kernniveaus, mit $\Delta E = -\mu B$. Experimentell findet man, dass sogenannte Auswahlregeln gelten, dass also nicht alle Übergänge "erlaubt" sind. Bei ^{57}Fe beispielsweise findet man nur die sechs Übergänge für $m = 0, \pm 1$. Für die Übergangsenergien gilt

$$\hbar\omega_{a \rightarrow g} = (E_a - \frac{\mu_a}{l_a} m_a B) - (E_g - \frac{\mu_g}{l_g} m_g B) = \hbar\omega_0 - (\frac{\mu_a}{l_a} m_a - \frac{\mu_g}{l_g} m_g) B \quad (75)$$

Ist die Quelle bewegt, so gilt mit dem Dopplereffekt

$$\hbar\omega_{m_a \rightarrow m_g} = \hbar\omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (76)$$

Daraus erhalten wir eine Bedingung für die Resonanzgeschwindigkeit:

$$\hbar\omega_0 \left(1 + \frac{v_{res}}{c}\right) = \hbar\omega_0 - \left(\frac{\mu_a}{l_a} m_a - \frac{\mu_g}{l_g} m_g\right) B \quad (77)$$

und daraus

$$v_{res} = -\frac{c}{\hbar\omega_0} \left(\frac{\mu_a}{l_a} m_a - \frac{\mu_g}{l_g} m_g\right) B \quad (78)$$

Bei unserem verwendeten ^{57}Fe - Isotop erhalten wir beispielsweise sechs Linien, aus denen sowohl das magnetische Hyperfeinfeld B , als auch das magnetische Moment μ_a des angeregten Zustandes bestimmt werden kann. So gilt also für das B -Feld am Kernort:

$$B = -v_{res} \frac{\hbar\omega_0}{c} \left(\frac{\mu_a}{l_a} m_a - \frac{\mu_g}{l_g} m_g\right)^{-1} \quad (79)$$

Hier und im Folgenden steht der Index 0 für die unverschobene Linie, und Q steht für die Quelle.

elektrische Quadrupolaufspaltung Die elektrische Quadrupolaufspaltung und die Isomerieschiebung rühren von der elektrostatischen Wechselwirkung des Atomkerns mit seiner Umgebung her. Vereinfachend ist hier so ein Einheitensystem gewählt, dass $\hbar = c = 1$ wird. Sei $\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ das elektrische Potential, das die Hüllelektronen und die Ladungen der übrigen Gitteratome am Ort $x = 0$ des Mössbauerkernes erzeugen. Man entwickelt $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}\right)_0 \cdot x_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_\alpha \cdot \partial x_\beta}\right)_0 \cdot x_\alpha \cdot x_\beta + \dots \quad (80)$$

Die Ladungsdichte des Atomkerns werde mit $\rho(x)$ bezeichnet. $\int \rho(x) dx = Ze$ ist die Kernladung. Die elektrostatische Wechselwirkungsenergie zwischen ρ und Φ beträgt damit:

$$E = \int \rho \Phi dx = eZ\Phi_0 + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}\right)_0 \cdot \int \rho x_\alpha dx + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_\alpha \cdot \partial x_\beta}\right)_0 \cdot \int \rho x_\alpha x_\beta dx \quad (81)$$

Der Φ_0 -Term trägt zur potentiellen Energie des Kristallgitters bei, die jetzt nicht interessiert. Die linearen Terme verschwinden, da Atomkerne kein elektrisches Dipolmoment $\int \rho x_\alpha dx$ besitzen. Mit $r^2 = \sum_{\alpha} x_\alpha^2$ und $(\Delta\Phi)_0 = \sum q_{\alpha\alpha} = 4\pi e |\Psi(0)|^2$ folgt:

$$E = \frac{2\pi e |\Psi(0)|^2}{3} \cdot \int \rho r^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha\alpha} \cdot \int \rho \left(x_\alpha^2 - \frac{r^2}{3}\right) dx \equiv E(I) + E(Q) \quad (82)$$

Der erste Term $E(I)$ gibt die Isomerieverschiebung, der zweite $E(Q)$ die elektrische Quadrupolaufspaltung. Man kann zeigen, dass für kubische Kristalle oder für eine kugelsymmetrische Kernladungsdichte $\rho(x)$ der Quadrupolterm verschwindet. Wir betrachten die Quadrupolaufspaltung für einen Spezialfall genauer: Die Koordinaten x_1, x_2, x_3 werden mit x, y, z bezeichnet. Die z -Achse sei durch den Kristallbau vor den beiden anderen Achsenrichtungen ausgezeichnet. Die x - und y -Achse seien aber völlig gleichwertig, so dass $q_{xx} = q_{yy} \neq q_{zz}$. Die Berechnung liefert damit einen $E(Q)$ -Term:

$$E(Q) = -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \frac{4\pi e |\Psi(0)|^2}{3} \right] \cdot \int \rho(3z^2 - r^2) dx = +\frac{V_{zz}}{4} \cdot \int \rho(3z^2 - r^2) dx \quad (83)$$

V_{zz} ist der elektrische Feldgradient am Kernort, soweit er nicht durch die s -Elektronen des Mössbaueratoms hervorgerufen wird.

Isomerieverschiebung Aufgrund der elektrostatischen Wechselwirkung des ausgedehnten Kerns mit den Elektronen am Kernort ist die Energie eines Kernzustandes für einen ausgedehnten Kern mit mittlerem quadratischen Kernradius $\langle r^2 \rangle$ gegenüber einem punktförmigen Kern verschoben. Es gilt der sogenannte Monopolterm:

$$E(I) = \frac{2\pi e |\Psi(0)|^2}{3} \cdot \int \rho r^2 dx \quad (84)$$

$|\Psi(0)|^2$ ist dabei die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons am Kernort. In unserem Fall hatten wir es mit einer bewegten Quelle zu tun. Die Energie eines beim Übergang vom angeregten Zustand $|a\rangle$ in den Grundzustand $|g\rangle$ emittierten γ -Quants ist also:

$$\omega_Q = \omega_0 \underbrace{(1 + v)}_{\text{Doppler-Term}} + \underbrace{\frac{2\pi Z e^2}{3} \cdot |\Psi(0)|^2 \cdot (\langle r_a^2 \rangle - \langle r_g^2 \rangle)}_{\text{Monopolterm}} \quad (85)$$

Da der Absorber ruht, ist der Term für die Absorption:

$$\omega_A = \omega_0 + \underbrace{\frac{2\pi Z e^2}{3} \cdot |\Psi_A(0)|^2 \cdot (\langle r_a^2 \rangle - \langle r_g^2 \rangle)}_{\text{Monopolterm}} \quad (86)$$

Resonanzabsorption erhält man für $\omega_Q = \omega_A$. Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit der Quelle, bei der Resonanz auftritt

$$v_{Res} = \frac{2\pi Z e^2}{3} \cdot (|\Psi_A(0)|^2 - |\Psi_Q(0)|^2) (\langle r_a^2 \rangle - \langle r_g^2 \rangle) \quad (87)$$

Die Größe v_{Res} bezeichnet man als Isomerieverschiebung, d.h. das Extremum der Linie ist gegenüber der unbewegten ($v = 0$) Quelle verschoben.

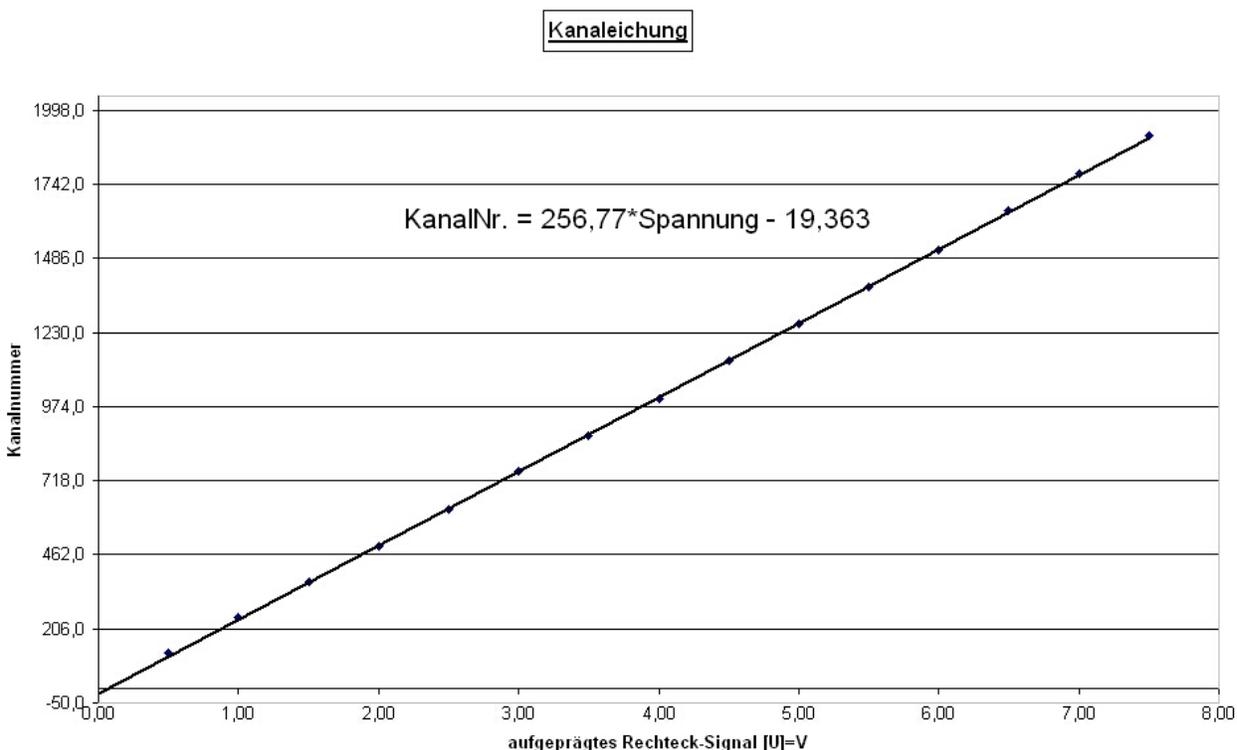


Abbildung 9: Kanaleichung: Zuordnung unterschiedlicher Spannungen auf die Kanäle des Vielkanalanalysators

2 Versuchsauswertung

2.1 Kanaleichung

Um zu wissen, ob und wie unsere Messgeräte funktionieren, legen wir zuerst eine Rechtecksspannung an, die gleichmäßig erhöht wird, und verfolgen die Kanaluordnung. Wir erkennen im Schaubild 9 einen äußerst linearen Verlauf bis hinauf zur maximalen Spannung knapp unter 8 Volt. Wir können nach Extrapolieren der linearen Regression den Offset der Messkarte bestimmen. Aus diesem Offset ist ersichtlich, dass der Nullpunkt der Energie beim Kanal -19 liegen würde. Dies wird bei den folgenden Rechnungen berücksichtigt. Die Steigung von 256,8 liefert die Anzahl der Kanäle pro Volt. Ein Kanal umfasst also einen Bereich von etwa 3,89 mV. Diese Eichung wird später zur Zuordnung der Energien verwendet.

2.2 Totzeit

Wegen des geometrischen Aufbaus der Messapparatur kann nicht jedes Ereignis der Quelle detektiert werden. Schon wegen der Betrachtung eines bestimmten Raumwinkels gehen viele

Ereignisse verloren. Dies kann aber berücksichtigt werden:

$$\dot{n}_w = \dot{n}_0 \frac{A}{4\pi r^2} \quad (88)$$

Dabei ist \dot{n}_w die Zählrate im betrachteten Raumwinkel, \dot{n}_0 ist die gesamte Zählrate im vollen Raumwinkel 4π , A ist die Detektorfläche und r der Abstand der Quelle vom Detektor. Ein relativ großes Problem bei der Messung stellt die Totzeit τ dar. Die Totzeit ist die Zeitdifferenz zwischen zwei "messbaren" Ereignissen. Für diesen Effekt ist unter anderem die Reaktionszeit der Messapparatur verantwortlich, die eine bestimmte Zeit braucht, bis das Eingangssignal über die Dynoden-Kaskade verstärkt und schließlich ausgegeben wird. Die Zählrate der verloren gegangenen Ereignisse ist $\tau \dot{n}_m \dot{n}_w$ (\dot{n}_m ist die gemessene Zählrate). Insgesamt also:

$$\tau \dot{n}_m \dot{n}_w + \dot{n}_m = \dot{n}_w \quad (89)$$

Mit 88 folgt:

$$\frac{1}{\dot{n}_m} = \left(\frac{4\pi}{\dot{n}_0 A} \right) r^2 + \tau \quad (90)$$

d.h. die Totzeit ist als Achsenabschnitt der Auftragung $\frac{1}{\dot{n}_m}(r^2)$ abzulesen. Die Zählrate ist dabei definiert als der Bruch Gesamtimpulse pro Zählzeit. Wir bestimmen die Totzeit durch Abstandsvariation (Schaubild: 10). In Diagramm 11 erkennt man, dass die reziproken Zählraten bei zunehmendem Abstandsquadrat immer stärker nach unten hin von einer Gerade abweichen. Dies liegt womöglich an Sekundäreffekten in der Umgebung (Bleiwand). Daher ergibt sich mit jedem zusätzlich verwendeten Punkt eine größere Totzeitabweichung. Deshalb haben wir nur unsere ersten zwei Werte in die Berechnung mit einbezogen. Daraus bestimmen wir die Totzeit zu $\tau = 42\mu s$.

2.3 Cs-137

Um spektroskopische Effekte zu sehen, müssen die einzelnen Spektrallinien noch deutlich unterscheidbar sein und dürfen sich nicht zu stark überlagern. Am einfachsten ist es deshalb, eine monochromatische Quelle zu betrachten, wie etwa Cs-137. Trotzdem finden wir im aufgenommenen Spektrum verschiedene Linien und Formationen (Abbildung 12). Im wesentlichen sehen wir vier Dinge:

662 keV Photopeak Aufgrund der Umwandlung des Cs-137 in ein angeregtes Niveau von Ba-137 durch K-Einfang wird vom Barium ein γ -Quant der Energie 662 keV ausgesandt, um ins Grundniveau zu gelangen. Die Emission erfolgt in dieser Energie zu 100%, da keine erlaubten Niveaus dazwischenliegen (vgl. Abb. 13). Der Peak liegt im Schaubild auf Kanal 1800 ± 10 .

Rückstreupeak durch Comptoneffekt Im Szintillator tritt der Comptoneffekt, also die Streuung der γ -Quanten an den Elektronenhüllen, auf. Die Energie des Rückstreupeaks zu unserem 662 keV Photopeak bestimmen wir zu 204,15 keV. In den Messdaten finden wir den Peak bei Kanalnummer 542.

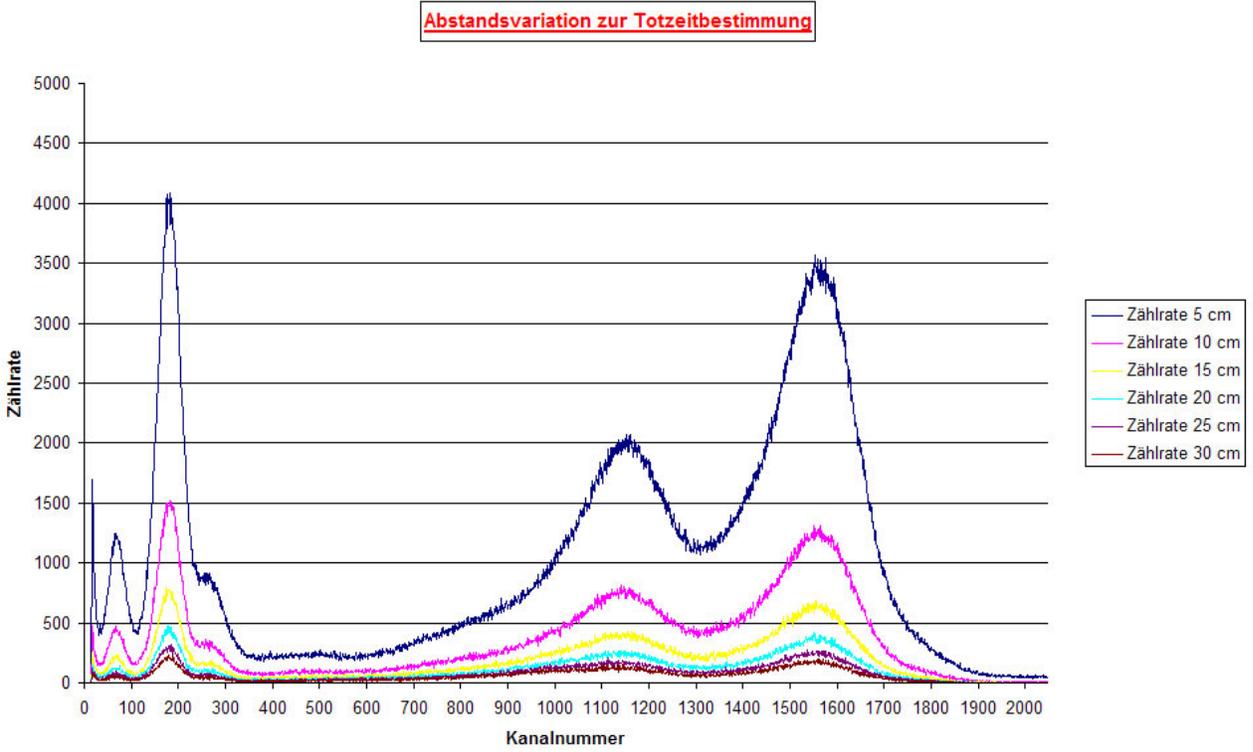


Abbildung 10: Abstandsvariation zur Totzeitbestimmung

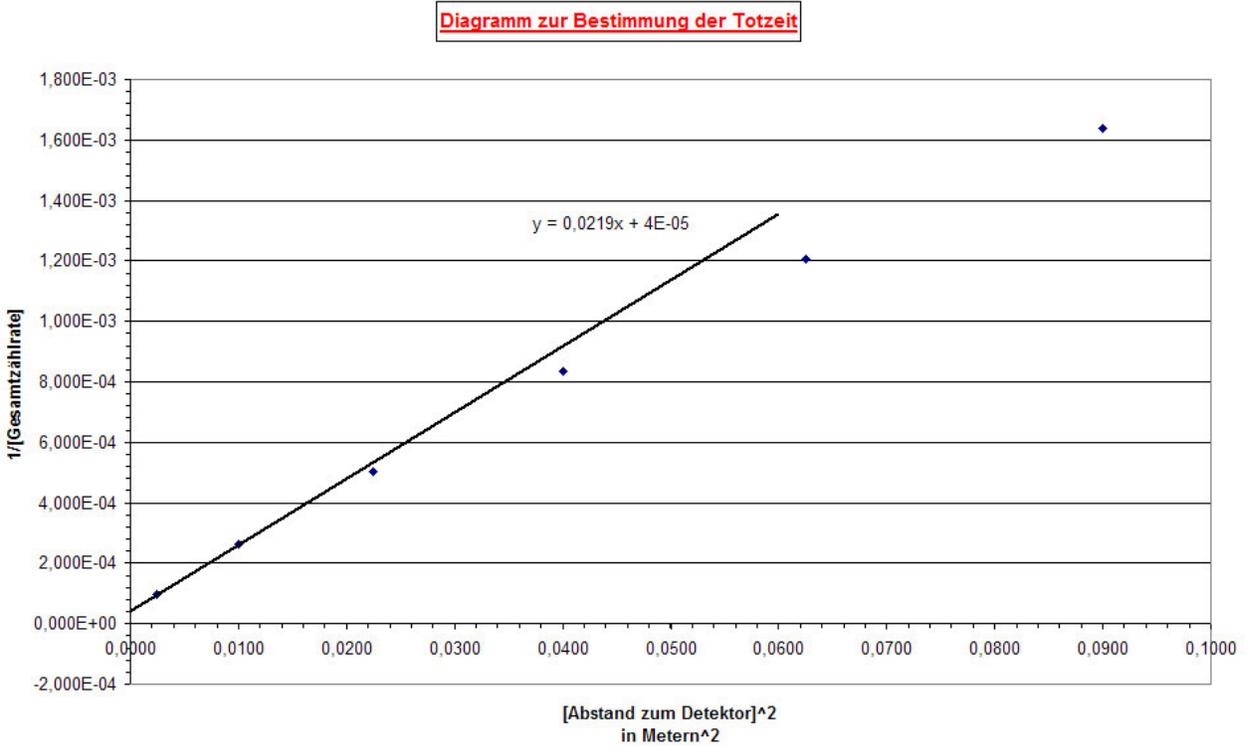


Abbildung 11: Totzeitbestimmung

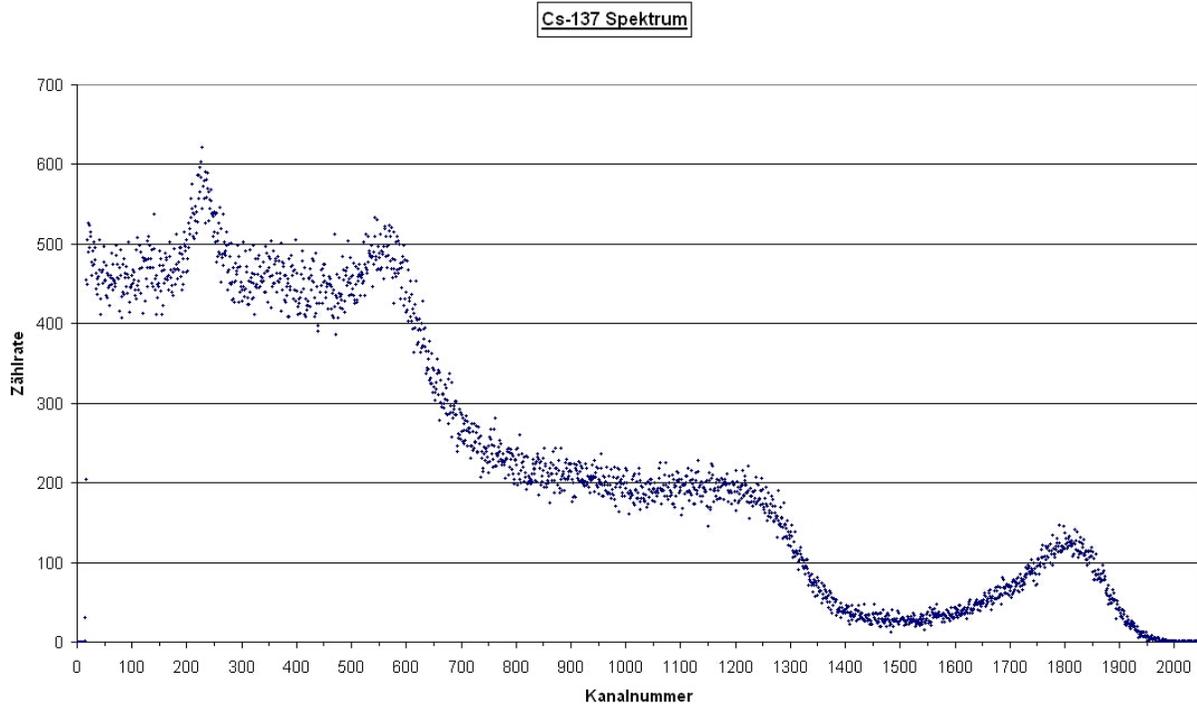


Abbildung 12: Spektrum der Cs-137 Quelle

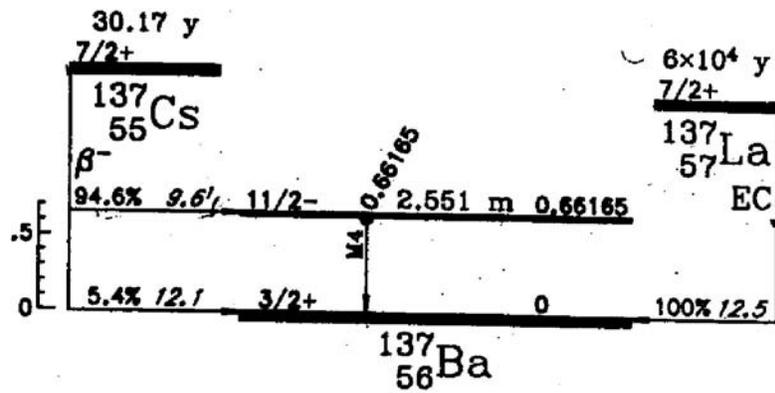


Abbildung 13: Zerfallsschema von Cs137

Art	gemessene Energie	Kanal	Energie aus Comptonformel
Photopeak	662 keV	1800	-
Rückstreupeak	204,15 keV	542	184,35 keV
Comptonkante	479,98 keV	1300	477,65 keV
Röntgenpeak	89,52 keV	227	-

Tabelle 3: Ergebnisse der Cäsium-Messungen

Comptonkante Infolge der Streuung der γ -Quanten werden auch Elektronen beschleunigt, sie nehmen Energie auf. Da der Comptoneffekt von 0° - 180° zunimmt, wird diese Formation im Spektrum Comptonkante genannt. Die Energie beträgt bei uns 479,98 keV, der Kanal ist 1300.

Röntgenpeak durch Blei Weil auch das uns schützende Blei durch die Strahlung angeregt wurde, sehen wir eine entsprechende Bleilinie. Die Energie beträgt 89,52 keV und beruht auf einem K-Einfang im Blei. Die zugeordnete Kanalnummer ist die 227.

Zur besseren Übersicht noch die Zusammenfassung in Tabelle 3 zum Vergleich mit den durch die Comptonformel berechneten Energiewerte. Wie ersichtlich ist stimmen die Wert aus der Comptonformel gut überein mit den gemessenen Werten.

2.4 Energie-Kanal-Zuordnung für Cäsium

Da wir schon festgestellt haben, dass die Energie den verschiedenen Kanälen linear zugeordnet wird, können wir leicht durch zwei ausgezeichnete Punkte im Spektrum des Cs-137 den Kanalnummern eine bestimmte Energie zuweisen. Wir verwenden hierzu den Photopeak (662 keV bei Kanal 1800) sowie den vorher bestimmten Offset (0 keV bei Kanal -19). Die Energie eines bestimmten Kanals K lässt sich über die Gleichung

$$E(K) = \frac{662 \text{ keV}}{1800 - (-19)} \cdot (K + 19) \quad (91)$$

bestimmen. Darüber hinaus wird deutlich mit welcher Genauigkeit wir die einzelnen Energien bestimmen. Ein einziger Kanal umfasst 364 eV.

2.5 Co-57

Im Gegensatz zur vorherigen Messung mit Cäsium liegt nun ein Spektrum von drei Photopeaks vor. Nach einem Einfang eines Elektrons der K-Schale im Kern des Co-57, wandelt es sich in Fe-57 um. Fe-57 ist dabei im angeregten Zustand, 136,5 keV über dem Grundniveau. Die Energieabgabe erfolgt nun entweder in einem einzigen γ -Quant der Energie 136,5 keV oder unter Emission zweier Quanten von 122,1 keV und 14,4 keV (vgl. Abb. 15 sowie 16). Letztere Linie interessiert uns später beim eigentlichen Versuchsteil, dem "Mössbauer-Effekt".

Die Vorgänge und Rechnungen verlaufen hier analog zu denen in Kap. 2.3.

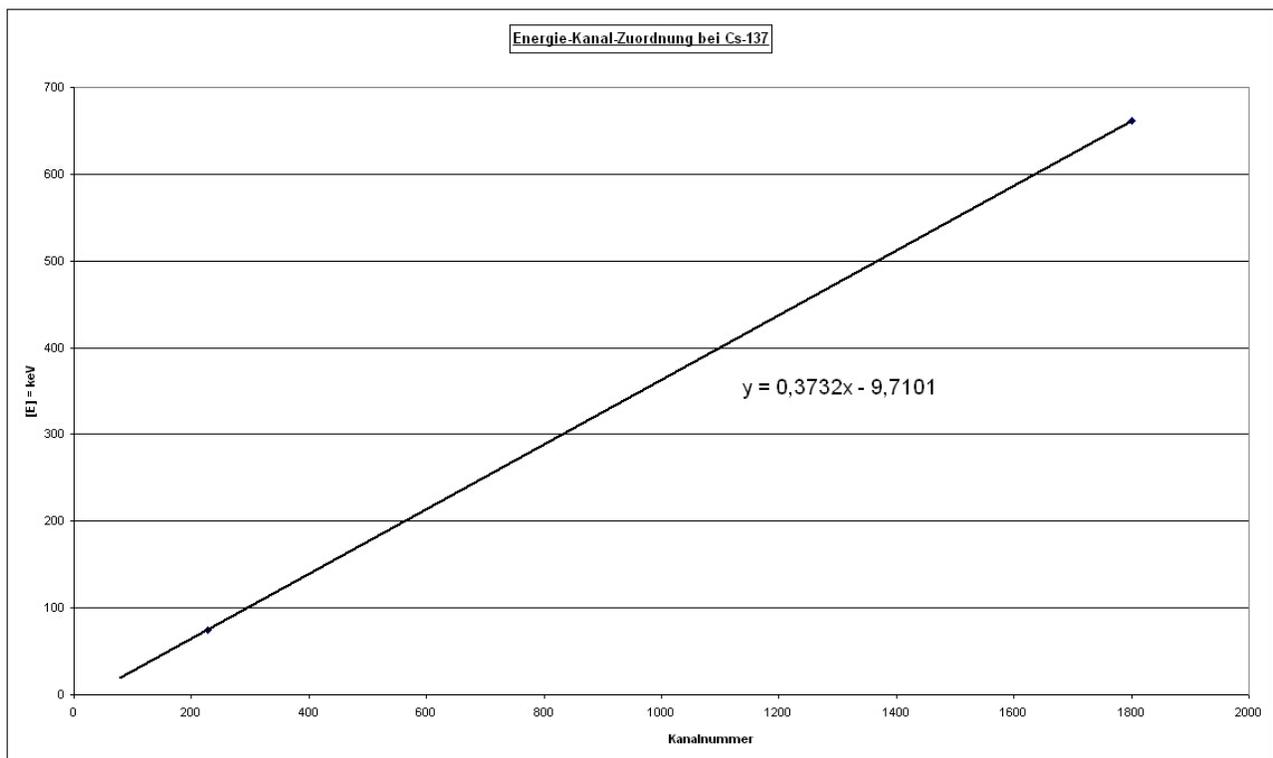


Abbildung 14: Energie-Kanal-Zuordnung bei Cs-137

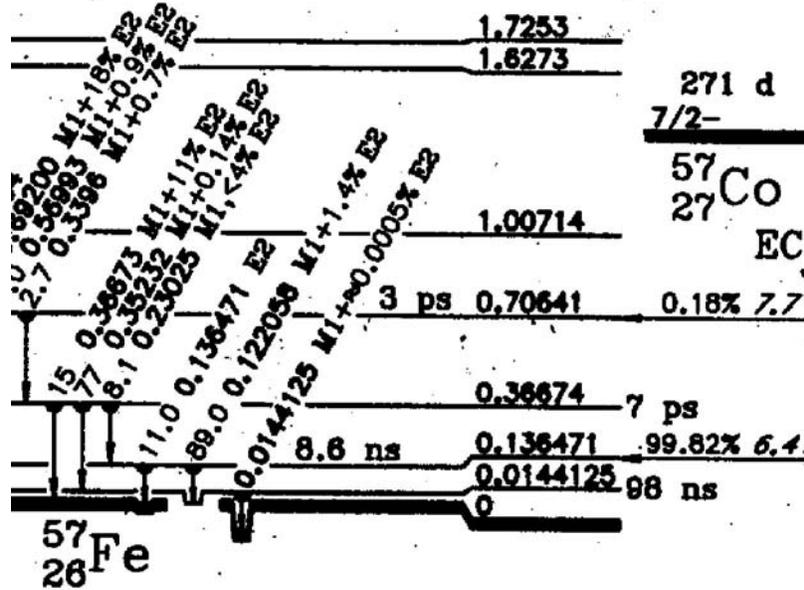


Abbildung 15: Zerfallsschema von Co-57

Cobaltquelle ohne Absorber im Abstand 30 cm

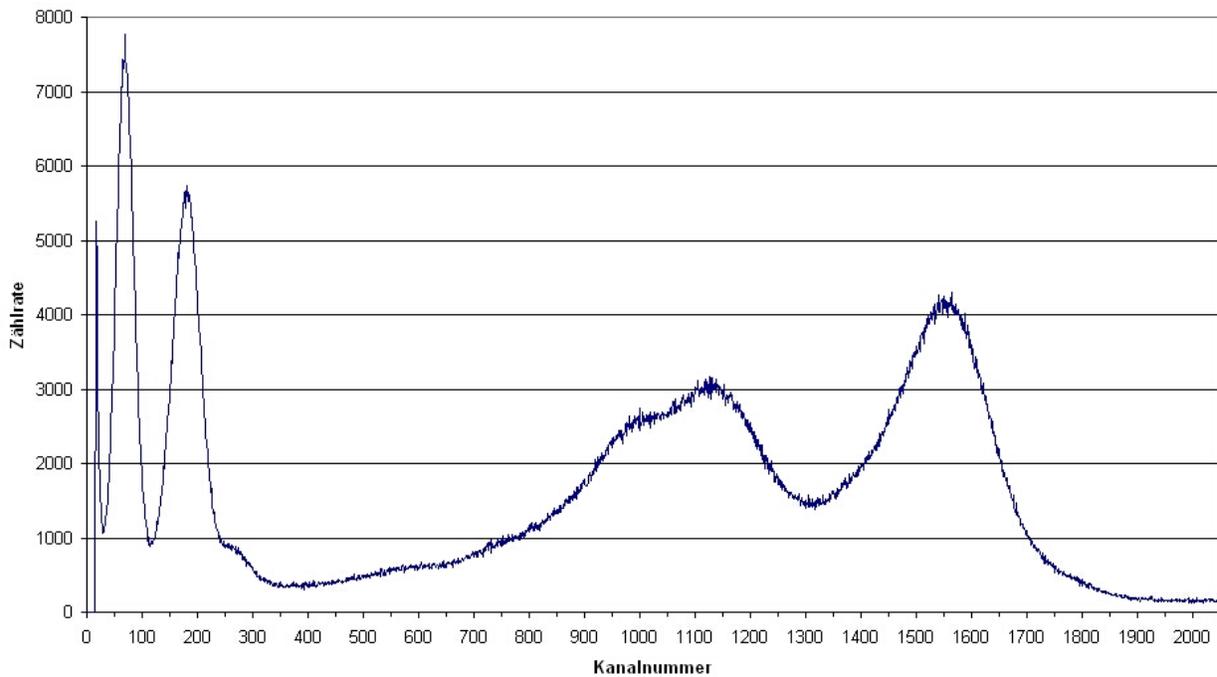


Abbildung 16: Cobaltquelle ohne Absorber im Abstand 30 cm

136,5 keV Photopeak Aufgrund der Seltenheit dieser Emission und der Energieauflösung in diesem Versuch sehen wir weder diesen Photopeak noch die entsprechende Comptonkante.

122,1 keV Photopeak Dieser Peak ist im Diagramm deutlich zu erkennen. Aus den Messdaten lesen wir Kanal 1560 für diese 122,1 keV Linie ab.

14,4 keV Photopeak Auch dieser Peak ist leicht auszumachen, da er sich scharf hervorhebt. Kanal 182 entspricht einer Energie von 15,6 keV. Die große Abweichung resultiert hier von Ungenauigkeiten in der Offsetmessung sowie bei der Kanalzuordnung des Photopeaks bei 122,1 keV.

Rückstreupeak zum 136,5 keV Peak Bei diesem Peak erhalten wir ein deutliches Signal. Die Energie beträgt 89,51 keV, die Kanalnummer 1139.

Rückstreupeak zum 122,1 keV Peak Dieser Peak ist nur als schwache Schulter neben dem 136,5 keV Rückstreupeak auszumachen.

Rückstreupeak zum 14,4 keV Peak Auch dieser Peak geht leider in anderen unter.

Comptonkante zum 122,1 keV Peak Infolge des Zusammenfallens einiger Linien ist auch diese sehr verschmiert und kann nicht eindeutig ausgemacht werden.

Comptonkante zum 14,4 keV Peak Nachdem schon der Rückstreupeak nicht zu sehen war ist es nicht verwunderlich, dass auch die zugehörige Comptonkante in den Peaks im unteren Kanalbereich untergeht.

Röntgenpeak Durch innere Umwandlung im Eisen wird der 14,4 keV Anregungszustand entvölkert und Energie freigesetzt. Diese wird in Form von Röntgenstrahlung emittiert. Im Diagramm wäre dies Kanal 69, den wir zu 6,80 keV berechnet haben.

K_{α} **Blei** Wie beim Cs erhalten wir hier auch eine Bleilinie. Diese liegt bei Kanal 1007 und entspricht einer Energie von 79,31 keV.

Zur Übersicht wiederum die Kurzfassung in Tabelle 4 und der Vergleich mit den berechneten Energiewerten aus der Comptonformel. Von den mit der Comptonformel berechneten Werten konnten wir leider nur einen eindeutig im Diagramm ausmachen, dieser Wert deckt sich aber gut mit dem berechneten.

2.6 Energie-Kanal-Zuordnung für Cobalt

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder die Linearität der Zuordnung, um den einzelnen Kanälen Energien zu zuweisen. Wir verwenden hierzu den Photopeak bei 122,1 keV (Kanal 1560) und den Nullpunkt (Kanal -19) (Abbildung 17). Daraus ergibt sich für die Energie eines bestimmten Kanals K :

$$E(K) = \frac{122,1 \text{ keV}}{1560 - (-19)} \cdot (K + 19) \quad (92)$$

Art	gemessene Energie	Kanal	Energie aus Comptonformel
Photopeak I	15,54 keV	182	-
Photopeak II	122,1 keV	1560	-
Photopeak III	136,5 keV	-	-
Rückstreupeak I	-	-	13,36 keV
Rückstreupeak II	-	-	82,62 keV
Rückstreupeak III	89,51 keV	1139	88,97 keV
Comptonkante I	-	-	0,74 keV
Comptonkante II	-	-	39,48 keV
Comptonkante III	-	-	47,53 keV
Röntgenpeak	6,80 keV	69	-
K_{α} Blei	79,31 keV	1007	-

Tabelle 4: Ergebnisse der Cobalt-Messungen

Ein einziger Kanal umfasst in dieser Auftragung 78 eV. Des weiteren sind wir nun in der Lage, einzelne "Energie-Fenster" zu wählen und somit nur diesen Energiebereich auf die Kanäle zuweisen zu lassen.

2.7 verschiedene Absorber und ihre Wirkung auf die Spektrallinien

Im Allgemeinen war der Aufbau immer derselbe. Nachdem wir bei 30cm Abstand zwischen Detektor und Quelle in angemessener Zeit ein annehmbares Signal erhielten, nahmen wir das Cobalt-Spektrum erneut auf. Diesmal allerdings mit Absorbern verschiedener Materialien und Dicken.

2.7.1 Cobalt mit Plexiglas

Bei Plexiglas nahmen wir drei Spektren mit den Absorberdicken 5,2mm, 9,7mm und 14,9mm auf. Es fällt sofort auf, dass Plexiglas eine hohe Absorptionswirkung im Bereich der 14,4keV-Linie zeigt. Die Wirkung auf die oberen Kanäle ist ebenfalls zu erkennen, aber nicht so stark ausgeprägt.

Den Absorptionskoeffizienten bestimmen wir durch die Steigung der linearen Regression bei einer Auftragung des Logarithmus der gemessenen Zählrate über dem Detektorabstand:

$$\begin{aligned}\dot{n}(d) &= \dot{n}(0) e^{-\lambda d} \quad | \ln() \\ \ln \frac{\dot{n}(d)}{\dot{n}(0)} &= -\lambda d \\ \ln \dot{n}(d) &= -\lambda d + \ln \dot{n}(0)\end{aligned}$$

fügt man noch eine Totzeitkorrektur ein, so wird die Gleichung zu:

$$\ln \left(\frac{\dot{n}(d)}{1 - \tau/t \cdot \dot{n}(d)} \right) = -\lambda d + \ln \dot{n}(0) \quad (93)$$

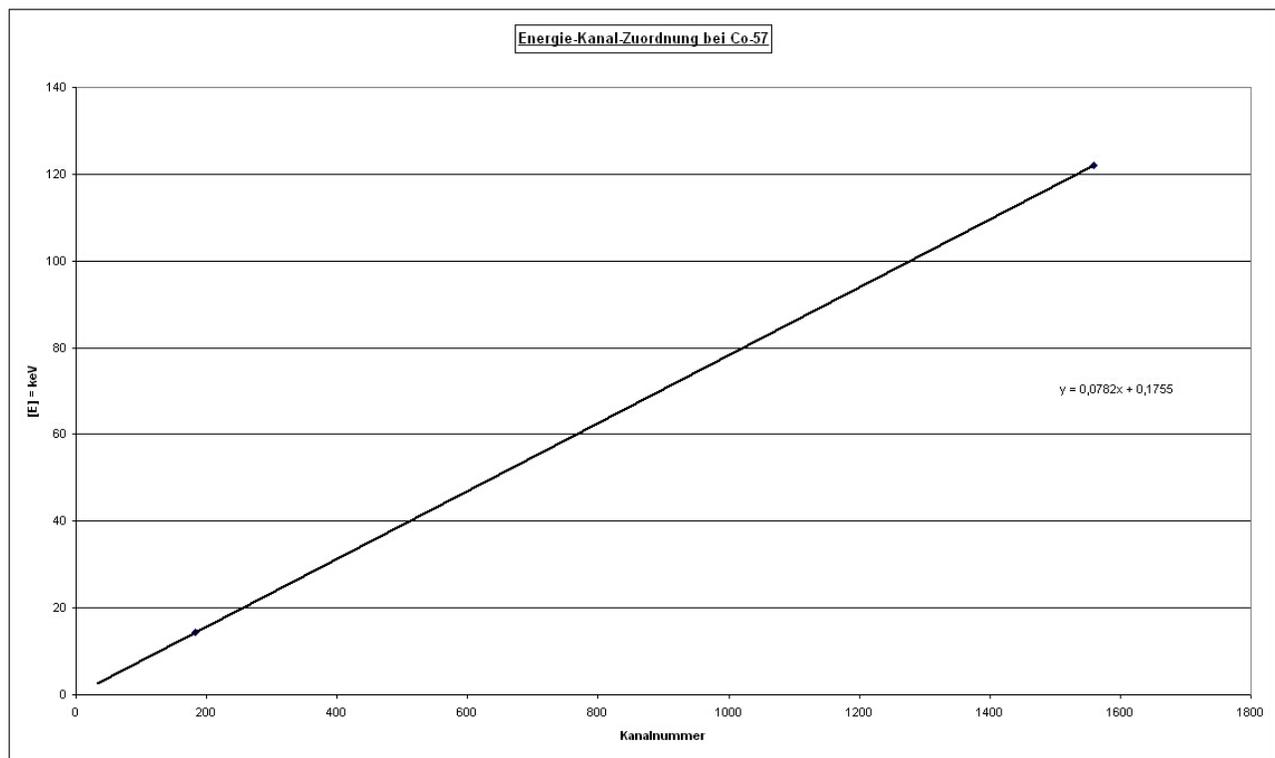


Abbildung 17: Energie-Kanal-Zuordnung bei Co-57

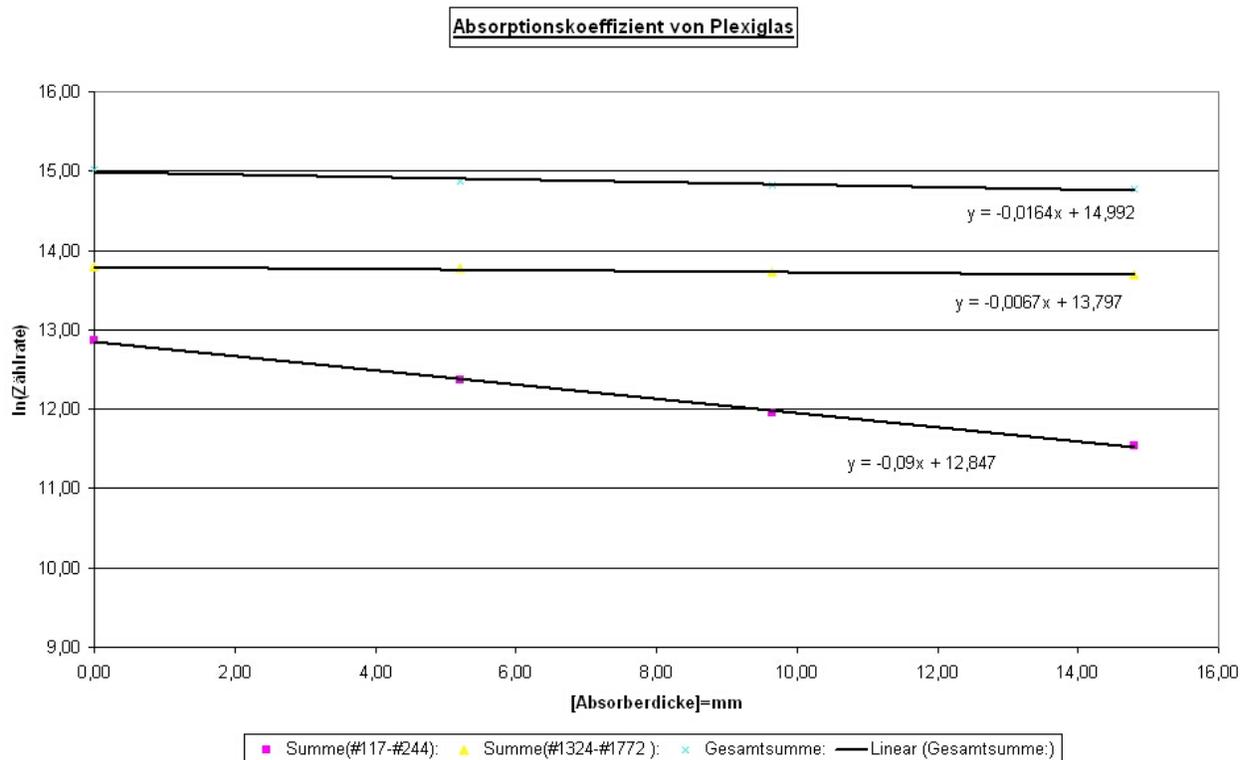


Abbildung 18: Absorptionskoeffizient von Plexiglas

Aus der Auftragung im Diagramm (18) entnehmen wir die Steigung der Ausgleichsgeraden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zusammen mit den theoretisch zu erwartenden Werten zusammengefasst. Wir erhalten hier allerdings nur 60% für 14,4 keV bzw. 45% für 122,1 keV des Sollwerts, d.h. es wird weniger absorbiert als erwartet. Das können wir uns nur durch starke Sekundäreffekte erklären. Die Sollwerte haben wir aus den uns vorliegenden Tabellen linear abgeschätzt.

Bereich	Absorptionskoeffizient	Literaturwert
14,4keV (Kan. 117 - 244)	0,0943 $\frac{1}{mm}$	0,1582 $\frac{1}{mm}$
122,1keV (Kan. 1324 - 1772)	0,0083 $\frac{1}{mm}$	0,0184 $\frac{1}{mm}$
Gesamt (Kan. 0 - 2047)	0,0164 $\frac{1}{mm}$	-

Tabelle 5: Absorptionskoeffizienten von Plexiglas

2.7.2 Cobalt mit Aluminium

Aluminium lag in den Absorberdicken 4,80mm, 10,05mm und 14,85mm vor. Diesmal verschwindet die 14,4keV-Linie schon beim Einbau des dünnsten Absorbers. Deshalb haben wir

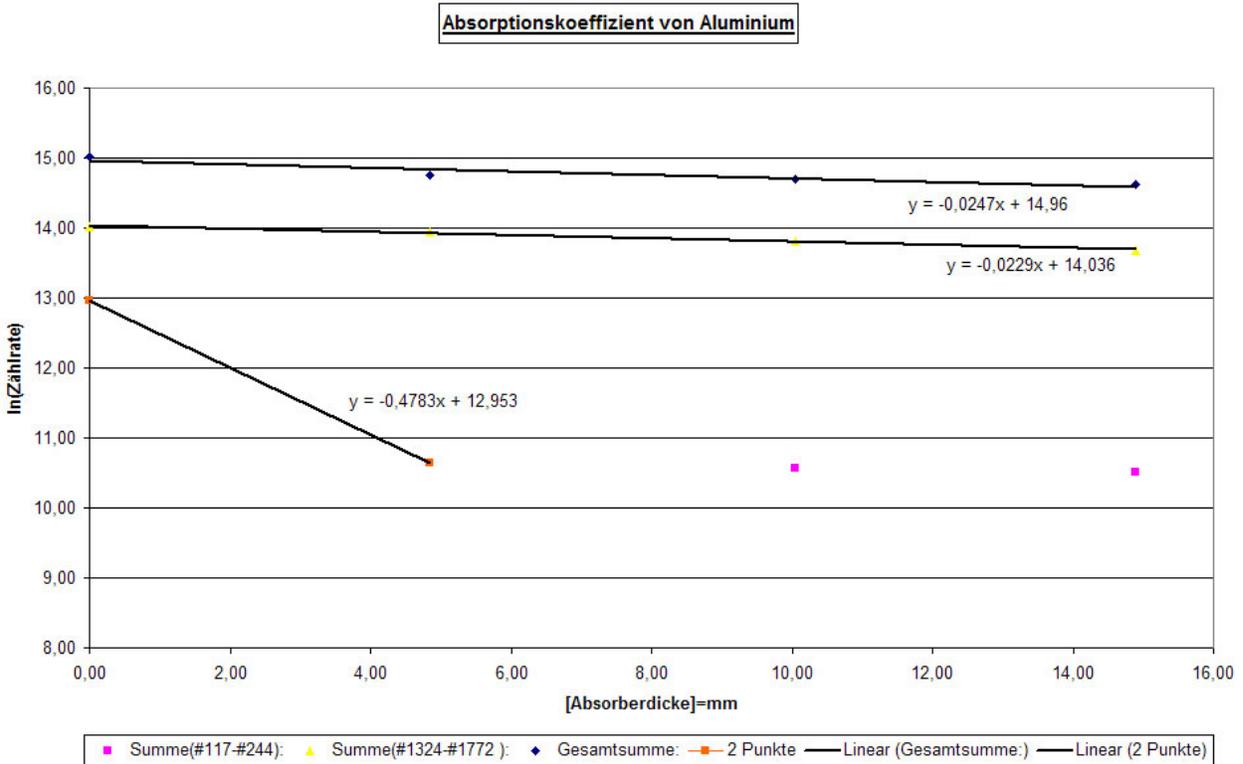


Abbildung 19: Absorptionskoeffizient von Aluminium

die Gerade auch nur durch die ersten beiden Messpunkte gelegt, da bei den restlichen keine Abschwächung mehr zu sehen ist (Abbildung 19). Daher ist unser erhaltener Wert wahrscheinlich zu klein. Auch der Wert für 122,1 keV liegt - ähnlich wie bei Plexiglas - um etwa 50% zu niedrig. Die Absorptionskoeffizienten bestimmen wir wiederum aus der Steigung der linearen Regression im Diagramm (Anhang: "Absorptionskoeffizient von Aluminium"). Die Zusammenfassung der Ergebnisse erfolgt in Tabelle 6.

2.8 Der Mössbauer-Effekt

Der Aufbau zum Versuchsteil "Mössbauer-Effekt" ist dem der Bestimmung der Absorptionskoeffizienten sehr ähnlich. Der Abstand Quelle - Detektor betrug 54,3cm. Unter Annahme

Bereich	Absorptionskoeffizient	Literaturwerte
14,4keV (Kan. 117 - 244)	$0,4783 \frac{1}{mm}$	$2,735 \frac{1}{mm}$
122,1keV (Kan. 1324 - 1772)	$0,0229 \frac{1}{mm}$	$0,0451 \frac{1}{mm}$
Gesamt (Kan. 0 - 2047)	$0,0247 \frac{1}{mm}$	-

Tabelle 6: Absorptionskoeffizient von Aluminium

einer punktförmig strahlenden Quelle bestimmten wir den idealen Abstand des Absorbers von der Quelle mit Hilfe des Strahlensatzes zu $50 \pm 0,1 \text{ cm}$. Der Abstand zwischen Quelle und Absorber betrug $42,6 \pm 0,1 \text{ cm}$. Wesentlich ist, dass nun die Quelle bewegt wird. Dadurch tritt eine geringe Energieverschiebung auf, welche die Effekte Isomerieverschiebung, elektrische Quadrupol- und magnetische Hyperfeinaufspaltung sichtbar macht. Mit Hilfe des PC teilten wir die Energie in 2048 Kanäle auf. Da am Lautsprecherantrieb der Quelle eine Dreiecksspannung anlag durchlief die Geschwindigkeit der Quelle v_{max} , 0 , $-v_{max}$, 0 und wieder v_{max} . Bei v_{max} wurde der Kanal durch einen Startimpuls wieder auf 0 gesetzt. v_{max} betrug bei uns $6,519 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$. Wir haben zur Auswertung die Kanäle 0 bis 1023 betrachtet.

Die Energiezuordnung auf die Kanäle erfolgt durch lineare Zuordnung der Geschwindigkeiten auf die Kanäle. So entspricht Kanal 0 der Geschwindigkeit v_{max} und Kanal 511 der Geschwindigkeit 0 . Eine Geschwindigkeitsdifferenz der Quelle entspricht dann einer Energiedifferenz, die wie folgt gegeben ist:

$$\Delta E = \hbar \omega_0 \frac{\Delta v}{c}$$

Die Nulllinie, also die Energie $14,4 \text{ keV}$, liegt auf Kanal 511 in der Aufzeichnung. Eine Isomerieverschiebung bedeutet folglich eine Abweichung der Mitte des/der Peaks von diesem Kanal. Die übrigen Linien werden ebenfalls relativ zur Nulllinie (nicht zur verschobenen Mitte) betrachtet. (Daten der Auswertung: Anhang: "Mössbauer-Effekt")

2.8.1 Berechnung der natürlichen Linienbreite

Nach der Definition der Halbwertsbreite als

$$\Gamma := \frac{1}{\tau}$$

und der Halbwertszeit eines Niveaus einer radioaktiven Substanz als

$$T_{1/2} = \tau \ln 2$$

folgt mit einer mittleren Halbwertszeit des untersten Zerfallsniveaus (Abb. 15) von 10^{-7} s eine Halbwertsbreite von

$$\Gamma = 4,6 * 10^{-12} \text{ keV}$$

Durch den im Theorieteil beschriebenen Vorgang der Resonanzabsorption erwarten wir aufgrund des Überlappereffektes von Absorption und Emission (Abb. 20) in etwa die doppelte Halbwertsbreite als die natürliche Linienbreite einer reinen Absorptions- oder Emissionslinie. Dieser Überlappereffekt bewirkt, dass auch ohne vollständige Überlappung der Absorptions- und Emissionsprofile allein durch das Überlappen am Rand der Profile schon Anregung stattfindet.

2.8.2 mit Edelstahl

Zunächst betrachten wir Edelstahl, also nur ein anderes Isotop von Eisen, als das strahlende Fe-57 selbst. Die Isomerieverschiebung beträgt

$$\Delta v_{Iso} = -0,2229 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

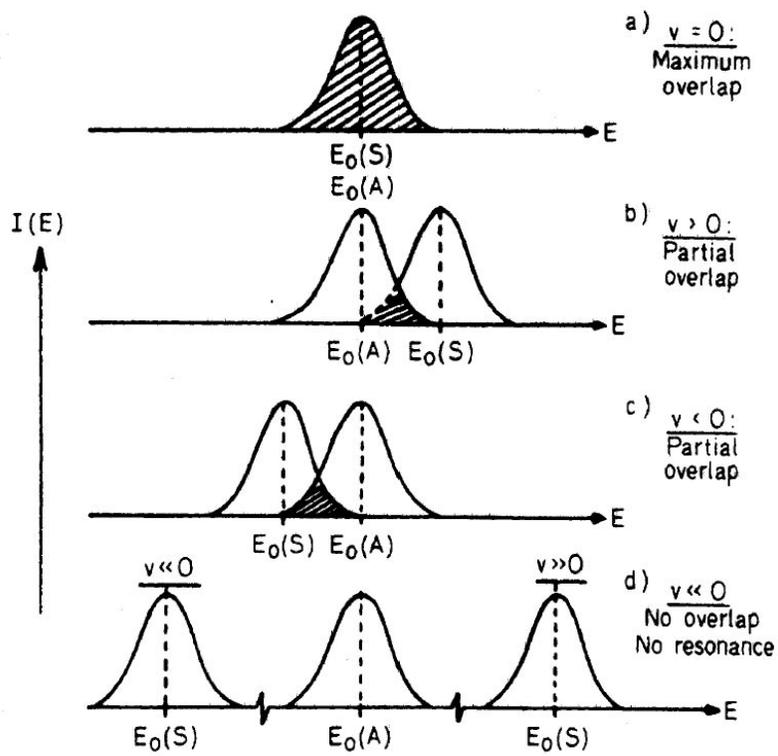


Abbildung 20: Überlappeneffekt bei Absorption und Emission

entsprechend

$$\Delta E_{Iso} = -1,101 * 10^{-11} \text{ keV}$$

Die Halbwertsbreite der Linie bestimmen wir zu

$$\Gamma = 1,896 * 10^{-11} \text{ keV}$$

Im Vergleich zur erwarteten Linienbreite von

$$\Gamma_{erwartet} = 9,2 * 10^{-12} \text{ keV}$$

liegen wir darüber. Da im Edelstahl immer noch zu einem großen Anteil Eisen vorkommt kann es hier passieren, dass es durch innere magnetische Felder zu einer Aufspaltung wie beim natürlichen Eisen kommt. Dieser Effekt wird zwar bei weitem nicht derartig ausgeprägt sein, reicht aber aus um zu einer Abweichung der Halbwertsbreite in dieser Größenordnung zu führen.

2.8.3 mit Eisensulfat

Auch bei Eisensulfat $FeSO_4$ messen wir eine Isomerieverschiebung. Die Geschwindigkeitsdifferenz beträgt hier

$$\Delta v_{Iso} = 1,127 \frac{mm}{s}$$

entsprechend

$$\Delta E_{Iso} = 5,413 * 10^{-11} \text{ keV}$$

Der Literaturwert beträgt

$$\Delta v_{Iso,lit} = 1,27 \frac{mm}{s}$$

Da die Linie aufspaltet, bestimmen wir den Mittelwert der Halbwertsbreiten:

$$\bar{\Gamma} = 1,437 * 10^{-11} \text{ keV}$$

Mit diesem Wert liegen wir verglichen mit dem erwarteten Wert von

$$\Gamma_{erwartet} = 9,2 * 10^{-12} \text{ keV}$$

erneut zu hoch. Dies ist eine durchaus realistische Abweichung vom erwarteten Wert, die durch beim Versuch selbst auftretende Störungen verursacht werden kann. Die elektrische Quadrupolaufspaltung beträgt

$$\Delta v_{Quadrupol} = 2,661 \frac{mm}{s}.$$

	$(v - v_\delta)$	m_g	m_a	$k = \frac{\mu_g m_g}{j_g} - \frac{\mu_a m_a}{j_a}$	$H = \frac{h\nu_0}{c} \frac{(v - v_\delta)}{k}$
Linie 1:	$5,004 \frac{mm}{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0,243	313,465 kG
Linie 2:	$2,807 \frac{mm}{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,141	302,835 kG
Linie 3:	$0,579 \frac{mm}{s}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0,039	224,677 kG
Linie 4:	$-1,063 \frac{mm}{s}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-0,039	412,319 kG
Linie 5:	$-3,240 \frac{mm}{s}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-0,141	349,530 kG
Linie 6:	$-5,513 \frac{mm}{s}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-0,243	345,370 kG

Tabelle 7: Absorptionslinien bei natürlichem Eisen

2.8.4 mit natürlichem Eisen

Zuletzt haben wir die Hyperfeinaufspaltung bei natürlichem Eisen betrachtet. Die mittlere Isomerieverschiebung finden wir um

$$\Delta v_{Iso} = -0,119 \frac{mm}{s}$$

entsprechend

$$\Delta E_{Iso} = -5,708 * 10^{-12} keV$$

Da uns keine Literaturwerte zur Isomerieverschiebung bei natürlichem Eisen vorlagen, führten wir einen qualitativen Vergleich zwischen unseren Messwerten und dem Diagramm im Anhang durch und stellten eine gute Übereinstimmung fest.

Die mittlere Halbwertsbreite der sechs Linien beträgt

$$\bar{\Gamma} = 9,174 * 10^{-12} keV$$

Somit stimmt hier die Halbwertsbreite sehr gut mit

$$\Gamma_{erwartet} = 9,2 * 10^{-12} keV$$

überein. Allerdings liegen die Halbwertsbreiten der beiden inneren Peaks unter dem erwarteten Wert. Da dies gemäß dem oben besprochenen Überlappeneffekt nicht sein kann, schließen wir auf einen Fehler in der Auswertung. Insbesondere schreiben wir dies einer unzureichenden Bestimmung der Basislinie zu, wie aus dem Diagramm (21) ersichtlich ist.

Darüber hinaus haben wir mit der Auswerteformel (79) die Stärke des Magnetfeldes der Aufspaltung berechnet. Die dazu benötigten Werte sind in Tabelle 7 zusammengestellt:

Der Durchschnittswert der Magnetfeldstärke ist somit

$$\bar{H} = 324,699 kG$$

und relativ nahe am Literaturwert von

$$H_{lit} = 333 kG$$

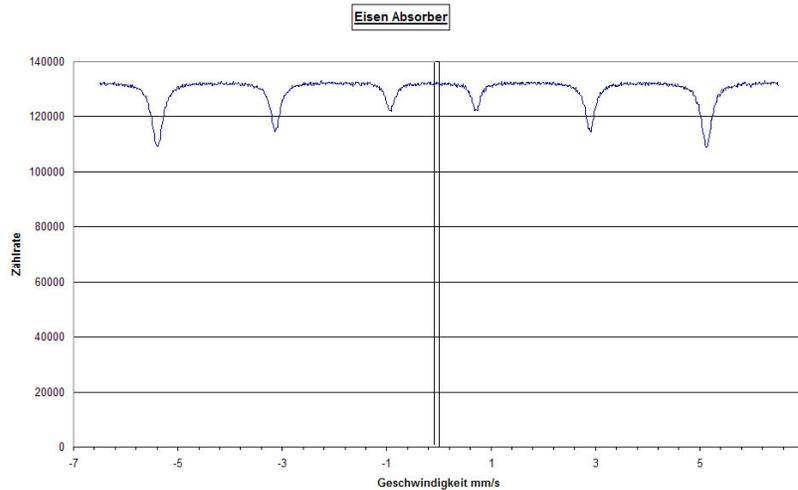


Abbildung 21: Eisenabsorber

3 Fehlerdiskussion

Da wir nur bei einigen Messwerten Vergleichswerte in der Literatur gefunden haben, ist es schwer, eine Aussage über die Qualität unserer Messungen zu machen. Die Diagramme weisen die erwartete Form auf. Die wenigen Vergleichswerte, die wir haben, stimmen aber ziemlich gut mit unseren gemessenen Werten überein. Die Geräte zeigen bei der Eichung einen linearen Verlauf, so dass wir hier keine Fehler erwarten. Bei der Bestimmung der Absorptionskoeffizienten für Aluminium war es schwierig einen richtigen Wert zu erhalten, da bereits bei der kleinsten verwendeten Dicke die 14,4 keV Linie vollständig absorbiert wurde. Dadurch kann der Absorptionskoeffizient hier nicht exakt angegeben werden. Es ist zu erwarten, dass der reale Absorptionskoeffizient betragsmäßig größer ist. Beim Mössbauereffekt selbst liegen die Messergebnisse auch im Bereich der Literaturwerte, so dass wir auch hier keine großen Fehlerquellen vermuten.

Literatur

- [1] T. Mayer-Kuckuk; *Kernphysik*; Teubner Studienbücher; 1992
- [2] Horst Wegener; *Der Mössbauereffekt und seine Anwendung in Physik und Chemie*; Hochschultaschenbücher Bibliographisches Institut; 1966
- [3] H. Vogel; *Gerthsen Physik*; 20. Auflage Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York; 1999
- [4] Gigler, Strube; *Der Mößbauer-Effekt*; Versuchsprotokoll; 2001
- [5] Kohlrausch; *Praktische Physik*; 23. und 24. Auflage, Teubner 1996