Grundpraktikum der Physik 2000
Versuch Nummer 9: Kundtsches Staubrohr und Quinckesches Resonanzroht

Michael Rill
michael@wirtschaftsphysik.de

Rafael Lang
rafael@wirtschaftsphysik.de

November 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Siehe auch [1]

1.1 Wellen und Definitionen

Als Welle bezeichnet man Schwingungen, die sich im Raum fortbewegen. Sie können ebenso wie eine Schwingung harmonisch, periodisch oder nicht-periodisch sein. In mechanischen Wellen wird stets Masse bewegt, d.h. die Teilchen schwingen um ihre Gleichgewichtslage. Im Gegensatz dazu existieren die elektromagnetischen Wellen, die sich auch durch den leeren Raum fortpflanzen können. Die charakteristische Eigenschaft aller Arten von Wellen ist der Transport von Energie durch den Raum. Auch bei mechanischen Wellen wird Energie transportiert, aber dieser Vorgang ist nicht immer mit dem Transport von Masse oder Impuls verbunden.
Bei der allgemeingültigen dreidimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{1}$$

ist die zweite Ableitung nach der Zeit proportional zur zweiten Ableitung nach dem Ort. Alle Lösungen dieser Wellengleichung sind sowohl zeit-, als auch ortsabhängig. Ihre Lösungen haben die allgemeine Form:

$$f(x,t) = f(kx - \omega t) + g(kx + \omega t) \tag{2}$$

Die sogenannte Wellenzahl ist im Betrag definiert als:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3}$$

Eigentlich hat die Wellenzahl k vektoriellen Charakter und wird auch häufig als Wellenvektor bezeichnet. Die Ausbreitungsrichtung der Welle wird durch die Richtung des Wellenvektors wiedergegeben.
Die Wellenlänge λ ist die räumliche Periode der Welle. Eine Zu- bzw. Abnahme von x um den Betrag λ verändert das Ergebnis der Gleichung nicht. Das Analogon zur räumlichen Periode ist die zeitliche Periode, die sogenannte Periodendauer T.
Die Inverse der Periodendauer wird als Frequenz bezeichnet. Sie gibt die Anzahl der Wellen pro Zeiteinheit an. Es gilt:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{4}$$

Häufig wird auch die Winkelgeschwindigkeit benutzt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \tag{5}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist definiert als

$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu \tag{6}$$

Im Folgenden sollen einige Spezialfälle der allgemeinen Lösung betrachtet werden.

1.2 Wellentypen und Wellenformen

Man kann grundsätzlich zwei verschiedene Ausbreitungsarten von Wellen unterscheiden:

Eine Longitudinalwelle pflanzt sich in der selben Richtung fort, in der die schwingenden Masseelemente des Mediums ihre Bewegungen ausführen. Longitudinalwellen sind grundsätzlich in jedem Medium möglich.

Bei Transversalwellen stehen Ausbreitungsrichtung der Welle und Schwingungsrichtung der Masseteilchen senkrecht aufeinander. Transversalwellen sind nur in Flüssigkeiten als Oberflächenwellen und in Festkörpern möglich. Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen, die sich auch im Vakuum ausbreiten können.

Eine einfachste Form einer Welle ist die sogenannte Harmonische Welle. Sie wird, wie es ihr charakteristischer sinusförmiger Verlauf vermuten lässt, im eindimensionalen Fall durch folgende Gleichung beschrieben:

$$y(x,t) = \hat{y}\cos(kx \pm \omega t) \tag{7}$$

Natürlich stellen auch folgende Lösungen der allgemeinen Wellendifferentialgleichung harmonische Wellen dar:

$$y(x,t) = \hat{y}\sin(kx \pm \omega t + \alpha) \tag{8}$$
$$y(x,t) = \hat{y}\exp^{i(kx \pm \omega t + \alpha)} \tag{9}$$

Die Welle wird als streng harmonisch bezeichnet, wenn sie kein Anfang und kein Ende hat. Dies ist in der Realität natürlich lediglich eine Idealisierung, da jede Welle einen Ursprungsort besitzen muss.
Wenn die Orte gleicher Phase, die sogenannten Wellenfronten, gerade Linien bilden, so spricht man von ebenen Wellen. Diese Wellenfronten stehen senkrecht zum Wellenvektor $\vec{k}$. Mathematisch gesehen muss für eine ebene Welle folgende Voraussetzung erfüllt sein:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const} \tag{10}$$

Von allen dreidimensionalen Wellenformen pflanzt sich nur die ebene Welle mit unveränderter Form im dispersionsfreien Medium fort. Dies wiederspricht natürlich dem allgemeinen Bild einer Welle als Fortpflanzung einer Verformung. Deshalb ist eine Ebene Welle in der Realität auch nur in Näherung beobachtbar.
Haben die Wellenfronten einen kreisförmigen Verlauf, so spricht man von Kreiswellen. Dehnt man diese Vorstellung auf drei Dimensionen aus, so erhält man die Kugelwelle. Bei der Kreis- und der Kugelwelle nimmt die Amplitude mit steigendem Radius ab, da die Energie der Welle auf eine größere Fläche verteilt werden muss.

1.3 Dispersion

Bei einer Welle unterscheidet man zwei Arten von Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

Die Phasengeschwindigkeit beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer harmonischen Welle:

$$c_{phase} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \tag{11}$$

Die Gruppengeschwindigkeit bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer impulsartigen lokalen Störung oder einer sogenannten Wellengruppe. Sie entspricht der Geschwindigkeit, mit welcher in der Welle Energie transportiert oder Signale übermittelt werden. Ihre obere Schranke ist die Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum. Es gilt:

$$c_{gruppe} = \frac{d\omega}{dk} \tag{12}$$

Ist bei einer Welle die Phasengeschwindigkeit verschieden von der Gruppengeschwindigkeit, bzw. die Phasengeschwindigkeit abhängig von der Wellenlänge, so spricht man von Dispersion.

1.4 Superposition von Wellen

Das Superpositionsprinzip von Wellen besagt, dass sich zwei gleichartige Wellenfelder $\xi_1(\vec{r}, t)$ und $\xi_2(\vec{r}, t)$ additiv überlagern:

$$\xi_{res}(\vec{r}, t) = \xi_1(\vec{r}, t) + \xi_2(\vec{r}, t) \tag{13}$$

Daraus folgt, dass die Wellengleichung (1) linear ist. Das Superpositionsprinzip wird vor allem bei der Berechnung der Beugung und der Interferenz verwendet. Praktisch werden dabei die Auslenkungen aller Teilchen an einem bestimmten Ort zu einer resultierenden Amplitude addiert. Die ungestörte Superposition tritt nicht mehr ein, wenn eine Welle die Eigenschaften des Mediums sehr stark beeinflusst.

1.5 Interferenz

Bei der Überlagerung von Wellen hat man einen eigenständigen Begriff eingeführt. Die Interferenz ist im Superpositionsprinzip für Wellen begründet. Man unterscheidet zwei verschiedene Arten der Interferenz:

Konstruktive Interferenz: Wellen gleicher Kreisfrequenz und gleicher Phase überlagern sich konstruktiv, d.h. verstärken sich maximal.

Destruktive Interferenz: Wellen gleicher Kreisfrequenz und einer Phasenverschiebung von π überlagern sich destruktiv, d.h. schwächen sich maximal ab.

1.6 Stehende Wellen und Resonanz

Eine besondere Situation tritt ein, wenn ein Wellenzug an einem Hindernis reflektiert wird. Hierbei interferiert die ankommende mit der reflektierten Welle über eine längere Strecke. Die resultierende Welle bewegt sich nicht mehr in einer Richtung weiter, sondern sie schwingt nur am Ort auf und ab. Die Stellen maximaler Teilchengeschwindigkeit werden als Schnellebäuche bezeichnet. Sie wiederhohlen sich im Abstand von $\frac{\lambda}{2}$. Zwischen den Schnellebäuchen befinden sich jeweils in der Mitte die sogenannten Schnelleknoten, an denen die Teilchengeschwindigkeit null ist. Ein solches Gebilde nennt man stehende Welle. Die stehende Welle gehorcht allgemein der Gleichung:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cdot \cos(\omega t)\sin(kx) \tag{14}$$

Bei der Reflexion unterscheidet man grundsätzlich feste und freie Enden. Bei der Reflexion am festen Ende tritt (im Gegensatz zum freien Ende) ein Phasensprung von $\frac{\lambda}{2}$ auf.
Resonanz, der Zustand überlagerter Schwingungen mit maximaler Amplitude, tritt nur bei bestimmten Frequenzen auf. Diese nennt man Eigenfrequenzen.

Stehende Wellen zwischen festen Enden: Bei einer Seilwelle befindet sich am festen Ende ein Schnelleknoten. Für ein solches System sind nur Eigenschwingungen möglich, bei denen die Wellenlänge ein ganzzahliger Bruchteil der Seillänge L ist. Es gilt:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \tag{15}$$

Die zugehörigen Eigenfrequenzen sind:

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} \tag{16}$$

Für die n-te harmonische Schwingung folgt daher

$$\nu_n = n \cdot \frac{c}{2L} \tag{17}$$

Stehende Welle zwischen zwei losen Enden: Bei einem Seil befinden sich am losen Ende Schnellebäuche. Die Herleitung der Formel für die Eigenfrequenzen folgt ganz analog, und so gilt auch hier

$$\nu_n = n \cdot \frac{c}{2L} \tag{18}$$

Stehende Welle bei einem freien und einem festen Ende: Die Bedingungen für eine stehende Welle lässt sich schreiben als:

$$L = (2n-1)\frac{c}{4L} \tag{19}$$

Für die Resonanzfrequenzen folgt daher:

$$\nu_n = (2n-1)\frac{c}{2L} \tag{20}$$

1.7 Schallgeschwindigkeit in Gasen

Zur Herleitung betrachtet man Schallwellen in einem Rohr. An der Stelle x beträgt die Geschwindigkeit $v(x)$ und der Druck $p(x)$. An der Stelle $(x+dx)$ beträgt die Geschwindigkeit $v(x+dx)$ und der Druck $p(x+dx)$.
Betrachtung der Kräfte an den Stellen x und $x+dx$:

$$F_x = Ap(x) \tag{21}$$

$$F_{x+dx} = Ap(x+dx) \tag{22}$$

wobei A die Querschnittsfläche des Rohres ist. Addition der beiden Kräfte ergibt

$$F = -A\left(p(x+dx) - p(x)\right) \tag{23}$$

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom gilt

$$F = m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \tag{24}$$

Gleichsetzen der beiden obigen Gleichungen ergibt wiederum

$$m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = A\left(p(x+dx) - p(x)\right) \tag{25}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird mit $dx^{-1}\,dx$ erweitert. Mit $m = \varrho\, A\,dx$ folgt dann

$$\varrho\, A\frac{\partial\, v}{\partial\, t}dx = -A\frac{\partial\, p}{\partial\, x}dx \tag{26}$$

$$\frac{\partial\, v}{\partial\, t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\, p}{\partial\, x} \tag{27}$$

Volumenänderung der Luftsäule:

$$\begin{aligned} dV &= A\ dl & (28)\\ &= A\ \left(v(x+dx) - v(x)\right)\ dt \\ &= A\ dt\ dv \\ &= A\ dt\frac{\partial\, v}{\partial\, x}dx & (29)\end{aligned}$$

Da aber $A\ dx = V$ gilt, folgt:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\partial\, v}{\partial\, x}dt \tag{30}$$

Für die Kompressibilität gilt:

$$\kappa = -\frac{dV}{V\ dp}$$

$$\frac{dV}{V} = -\kappa\, dp \tag{31}$$

Und in Gleichung (30) eingesetzt ergibt sich

$$-\kappa\, dp = \frac{\partial\, v}{\partial\, x}dt$$

$$-\frac{\partial\, p}{\partial\, t}\kappa = \frac{\partial\, v}{\partial\, x} \tag{32}$$

Fast fertig, leitet man Gleichung (27) nach x ab

$$\frac{\partial^{\,2} v}{\partial\, t \partial\, x} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial^{\,2} p}{\partial\, x^2} \tag{33}$$

und Gleichung (32) nach t

$$-\kappa\frac{\partial^{\,2} p}{\partial\, t^2} = \frac{\partial^{\,2} v}{\partial\, t\, \partial\, x} \tag{34}$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen, so folgt

$$\frac{\partial^{\,2} v}{\partial\, t \partial\, x} = \frac{\partial^{\,2} v}{\partial\, t \partial\, x} \tag{35}$$

$$\frac{1}{\varrho\, \kappa}\frac{\partial^{\,2} p}{\partial\, x^2} = \frac{\partial^{\,2} p}{\partial\, t^2} \tag{36}$$

Der Vergleich mit Gleichung (1) liefert:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varrho\,\kappa}} \tag{37}$$

1.8 Schallgeschwindigkeit und Adiabatenexponent

Die Druckänderung bei der Schallausbreitung findet so schnell statt, dass ein Wärmeaustausch nahezu unmöglich ist. Es handelt sich um einen adiabatischen Vorgang. Deshalb gilt die Poissongleichung:

$$pV^{\gamma} = \text{const} \tag{38}$$

Für die Kompressibilität des Gases gilt:

$$\frac{\partial\, p}{\partial\, V} = -\frac{1}{\kappa V} \tag{39}$$

Setzt man diese Gleichungen ineinader ein, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa V} &= \gamma p V^{\gamma} V^{-(\gamma+1)} \\ \gamma p &= \kappa^{-1} \end{aligned} \tag{40}$$

Mit Hilfe der Allgemeinen Gasgleichung $pV = nRT$ und Gleichung (37) ergibt sich folgende Gleichung der Schallgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{41}$$

wobei $M = \frac{m}{n}$ die Molare Masse ist.

1.9 Schallgeschwindigkeiten in Festkörpern

Analog zur Schallgeschwindigkeit in Gasen (37) gilt ganz allgemein

$$c = \sqrt{\frac{Modul}{Dichte}}. \tag{42}$$

Bei Festkörpern gilt also

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \tag{43}$$

wobei E das Elastizitätsmodul ist.

2 Experiment

2.1 Kundtsches Rohr

Abbildung 1: Versuchsaufbau

Beim Kundtschen Staubrohr klemmt man einen Stab aus Messing, dessen Schallgeschwindigkeit man bestimmen will, bei $\frac{\lambda}{4}$ und $\frac{3\lambda}{4}$ seiner Länge ein. Der Stab wird durch Reiben zu Eigenschwingungen angeregt. Da sich an beiden Einspannungen Schwingungsknoten befinden, entspricht die Stablänge L genau einer Wellenlänge in Messing. Damit befinden sich an den Stabenden Schwingungsbäuche.

Zur Bestimmung der Wellenlänge in Luft schließt sich eine Glasröhre an, die am einen Ende mit einem Stempel verschlossen ist. Auf der anderen Seite ragt der Messingstab, dessen Ende zur besseren Schwingungsübertragung verbreitert ist, in die Röhre hinein. Die Eigenschwingungen im Glasrohr, welche sich bei geeigneter Stempelstellung ausbilden, werden mit Hilfe von Korkmehl, welches auf dem Boden der Glasröhre ausgestreut ist, sichtbar gemacht. Das Korkmehl wird zuvor durch leichtes Drehen der Röhre etwas angehoben, damit sich das Resonanzbild gut einstellen kann. Die Strecke zwischen zwei Schwingungsbäuchen wird nun mit Hilfe von Millimeterpapier bestimmt, welches am Boden der Röhre angebracht ist.

Diese Messung wird mehrere Male wiederholt. Die Schallgeschwindigkeit in Messing wird mit folgender Formel bestimmt:

$$c_{Messing} = \lambda_{Messing} \frac{\cdot c_{Luft}}{\lambda_{Luft}} \tag{44}$$

Zusätzlich wird das Elastizitätsmodul von Messing bestimmt. Dafür gilt:

$$E_{Messing} = \varrho_{\ Messing} \cdot c_{Messing}^2 \tag{45}$$

Nach Datenblatt A ergeben sich bei unserem Versuch

$$\begin{aligned} c_{Messing} &= 3669m/\ s \pm 49m/\ s \\ E_{Messing} &= 114GPa \pm 3GPa \end{aligned}$$

Der Literaturwert für das Elastizitätsmodul (siehe [4]) beträgt $98GPa$. Der relative Fehler beträgt damit 16%

Fehlerdiskussion: Einen unberücksichtigten Einfluß hat die starke Erwärmung des Messings. Durch das ständige Reiben erreicht es eine Temperatur von etwa $33^o C$, wodurch sich das Elastizitätsmodul verändert. Außerdem ist natürlich die Ablesegenauigkeit beschränkt. Die stehende Welle im Kundtschen Rohr entsteht darüberhinaus aufgrund von Mehrfachreflexionen und nicht, wie von uns vereinfachend angenommen, durch eine einfache Reflexion. Dadurch entstehen Oberschwingungen, die die Messung beeinflussen. Hinzu kommen dann noch Fehler durch die Transversalschwingungen im Metallstab und eine eventuell daraus resultierende Berührung der Scheibe des Metallstabes mit der Glaswand des Zylinders.

Datenblatt A

Allgemeine Daten

Luftdruck	698	Torr
Temperatur	22	°C
Schallgeschwindigkeit in Luft (Von uns gemessener Wert, siehe Datenblatt B)	344	m/s
Messungenauigkeit Länge Messingstab	1	mm
Messungenauigkeit Bäuche	1	mm
Dichte von gelben Messing (Quelle : Kuchling S.605)	8500	kg/m³

Versuchsdaten

Länge des Messingstabes 1600 mm

	Abstand *d* in [mm]	Wellenlänge λ_{Luft} in Luft in [mm]	Frequenz *f*	Schallgeschwingikeit in Messing in [m/s]
Messung 1	75	150	2293,33	3669
Messung 2	75	150	2293,33	3669
Messung 3	75	150	2293,33	3669
Arithmestisches Mittel	75	150	2293,33	3669
			Gaussfehler:	± 49

Elastizitätsmodul: 114 GPa
Größtfehler: 3 GPa

2.2 Quinckesches Resonanzrohr

Abbildung 2: Versuchsaufbau

Am oberen Ende einer vertikalen Röhre ist ein Lautsprecher angebracht, über den mit Hilfe eines Frequenzgenerators verschiedene Frequenzen erzeugt werden können. In einer geringen Entfernung vom oberen Ende ist ein Mikrofon angebracht, welches die Intensität des Tones an der entsprechenden Stelle misst. Das untere Ende des Rohres bildet ein Stempel, der vertikal verschiebbar ist.
Man ermittelt das erste Maximum (oder, falls dies nicht möglich ist, eben das Zweite). Beim Herausziehen des Stempels zählt man anschließend die Anzahl der auftretenden Maxima. Beim Letzten Maxima wird der Abstand zum ersten Maximum gemessen und notiert. Die Röhre kann außer mit Luft auch mit beliebigen Gasen (in unserem Fall mit CO_2) gefüllt werden.
Man kann nun die Wellenlänge sehr einfach bestimmen. Die Frequenz wird am Frequenzgenerator abgelesen. Anschließend wird die Schallgeschwindigkeit bestimmt:

$$c = \lambda v \qquad (46)$$

Zusätzlich bestimmt man den Adiabatenexponenten des Gases:

$$\gamma = \frac{Mc^2}{RT} \tag{47}$$

Nach Datenblatt B ergeben sich die Schallgeschwindigkeiten zu

$$\begin{aligned} c_{Luft} &= 344m/\,s \pm 15m/\,s \\ c_{Kohlendioxid} &= 262m/\,s \pm 12m/\,s \end{aligned}$$

Die relativen Fehler von den Literaturwerten $c_{Luft} = 347m/\,s$ und $c_{Kohlendioxid} = 258m/\,s$ betragen $0,9\%$ bzw. $1,7\%$.
Das Verhältnis der Wärmekapazitäten beträgt

$$\begin{aligned} \kappa_{Luft} &= 1,40 \\ \kappa_{Kohlendioxid} &= 1,23 \end{aligned}$$

Fehlerdiskussion: Auch hier gilt wie oben, dass die genaue Lage der Maxima recht schwierig zu bestimmen ist. Neben der Ableseungenauigkeit geht mit einer Längenänderung auch immer eine Druckänderung einher. Bei dem Versuch mit Kohlendioxid ist ein zusätzlicher Fehler die Temperatur des ausströmenden Gases, welches bedeutend kälter als die Umgebung ist. Auch ist die vollständige Füllung des Rohres mit CO_2 praktisch nicht zu erreichen. Daher verwundert es auch nicht, dass der relative Fehler beim Versuch mit CO_2 knapp doppelt so groß ist wie der beim versuch mit Luft.

Datenblatt B

Allgemeine Daten

Luftdruck	698	Torr
Temperatur	22	°C
Messungenauigkeit beim Ablesen	5	mm
Messungenauigkeit Frequenz	10	Hz
Molare Masse von Luft	28,9412	g/mol
Molare Masse von CO_2	44,011	g/mol

Versuchsdaten

Luft	erstes Maximum in [mm]	letztes Maximum in [mm]	Frequenz in [Hz]	Anzahl der Maxima	Wellenlänge in [mm]	Schall geschwindigkeit in [m/s]	Gaussfehler in [m/s]
	558	44	1008	4	342,7	345	6
	521	90	2021	6	172,4	348	10
	580	55	2975	10	116,7	347	15
	585	35	4011	14	84,6	339	20
	580	70	5012	16	68,0	341	25
Arithmetisches Mittel:						344	15
Verhältnis der Wärmekapazitäten			$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c^2 \cdot M}{R \cdot T}$		1,40		

CO_2	erstes Maximum in [mm]	letztes Maximum in [mm]	Frequenz in [Hz]	Anzahl der Maxima	Wellenlänge in [mm]	Schall geschwindigkeit in [m/s]	Gaussfehler in [m/s]
	570	160	1025	4	273,3	280	6
	420	60	1670	6	144,0	240	8
	545	40	2066	8	144,3	298	10
	590	30	3024	14	86,2	261	15
	570	20	4020	20	57,9	233	20
Arithmetisches Mittel:						262	12
Verhältnis der Wärmekapazitäten			$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c^2 \cdot M}{R \cdot T}$		1,23		

Literatur

[1] A. Birnesser / S. Wagner (2000): Versuch Nr. 9: Kundtsches Staubrohr und Quinckesches Resonanzrohr; Ulm: Universität Ulm

[2] Bergmann / Schaefer (1998): Lehrbuch der Experimentalphysik; Bd.1: Mechanik, Relativität, Wärme; 11., völlig neubearbearbeitete Auflage; Berlin / New York: de Gruyter

[3] W. Walcher (1994): Praktikum der Physik; 7., überarbeitete und ergänzte Auflage; Stuttgart: Teubner

[4] Horst Kuchling (1999): Taschenbuch der Physik; 16. Auflage [Sonderausg.]; München / Wien: Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag