

Anfängerpraktikum  
Versuch 7

Bestimmung des Elastizitätsmoduls  
kristalliner Festkörper

Gruppe WP 8

Uwe Schwarz

uwe.schwarz@student.uni-ulm.de

Stefan Rapski

huha@gmx.de

29. März 2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Aufbau der Festkörper . . . . .	3
1.1.1	Arten fester Körper . . . . .	3
1.1.2	Fehlerarten im Aufbau von Kristallgittern . . . . .	3
1.2	Festkörperbindungen . . . . .	4
1.2.1	Ionare Bindungen . . . . .	4
1.2.2	Kovalente Bindungen . . . . .	4
1.2.3	Van-der-Waals-Bindungen . . . . .	5
1.2.4	Metallische Bindungen . . . . .	5
1.3	Elastizität und Verformung . . . . .	5
1.3.1	Spannung und Dehnung . . . . .	6
1.3.2	Die Spannungs-Dehnungs-Kurve . . . . .	7
1.4	Die Elastischen Moduln . . . . .	8
1.4.1	Schubmodul . . . . .	8
1.4.2	Elastizitätsmodul . . . . .	8
1.4.3	Kompressionsmodul . . . . .	9
1.5	Biegung eines einseitig eingespannten Balkens . . . . .	9
1.5.1	Berechnung des E-Moduls aus der Dehnung . . . . .	9
1.5.2	Berechnung des E-Moduls aus der Frequenz der Biegeschwin- gung . . . . .	11
1.6	Der Tensorcharakter der elastischen Konstanten . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Versuchsbeschreibung</b>	<b>14</b>
2.1	Bestimmung des E-Moduls mit dem statischen Verfahren . . . . .	14
2.2	Bestimmung des E-Moduls mit dem dynamischen Verfahren . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Versuchsauswertung</b>	<b>16</b>
3.1	Statische Methode . . . . .	16
3.2	Dynamische Methode . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Fehlerdiskussion und Vergleich der Methoden</b>	<b>19</b>

# 1 Theorie

## 1.1 Aufbau der Festkörper

### 1.1.1 Arten fester Körper

Es gibt zwei Arten von festen Körpern:

Zum einen **amorphe** Körper, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie keine Fernordnung besitzen. Sie besitzen keinen definierten Schmelzpunkt, der Übergang von der festen in die flüssige Phase erfolgt allmählich.

Im Gegensatz dazu besitzen **kristalline Festkörper** eine Fernordnung. Sämtliche atomare Bausteine sind in einem räumlichen Gitter regelmäßig angeordnet. Sie bestehen aus dem Vielfachen einer Einheit, der periodisch angeordneten Elementarzelle. Auguste Bravais fand heraus, dass es exakt vierzehn unterschiedliche Möglichkeiten der Anordnung der Atome in diesen nach ihm benannten Bravaiszellen gibt, welche sich wiederum zu sieben Kristallfamilien zusammenfassen lassen, nämlich triklin, monoklin, orthorhombisch, hexagonal, trigonal, tetragonal und kubisch. Näheres hierzu findet man zum Beispiel in [1], woraus auch folgendes Bild stammt, welches die vierzehn Bravais-Gitter darstellt.

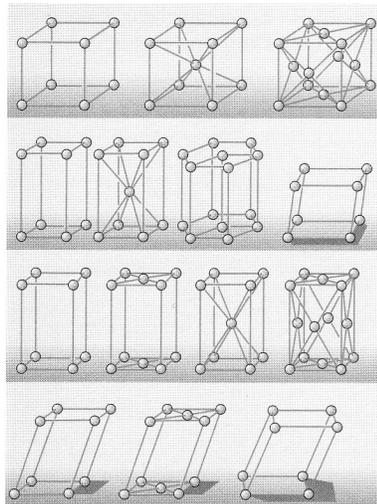


Abbildung 1: die vierzehn Bravais-Gitter

### 1.1.2 Fehlerarten im Aufbau von Kristallgittern

Ein **idealer Kristall** wäre ein Körper, der ein vollständig regelmäßiges Gitter besitzt. Dies kommt jedoch bei realen Kristallen niemals vor, denn schon allein deren Oberfläche ist ein Baufehler. Hier eine kurze Übersicht der möglichen Defekte, genaueres nachzulesen in [2].

**Punktfehler** treten bei allen Kristallen auf, man nennt sie auch Eigenfehlordnungen. Man kann drei verschiedene Arten unterscheiden. Der *Schottky-Defekt* tritt auf, wenn ein Atom in der Elementarzelle fehlt und stattdessen ein leerer Platz entsteht. Das Gegenteil dieses Punktfehlers wird *Anti-Schottky-Defekt* genannt, hier sitzt ein zusätzliches Atom auf einem Zwischengitterplatz. Des Weiteren gibt es noch die Kombination dieser beiden Möglichkeiten, den sogenannten *Frenkel-Defekt*.

**Chemische Fehler** nennt man die Fehler, bei denen sich Fremdatome entweder auf regulären Gitterplätzen oder im Zwischengitter einbauen. Sie können sich auf die physikalischen Eigenschaften von Kristallen auswirken, zum Beispiel können geladene Ionen die elektrischen Eigenschaften beeinflussen.

**Mehrdimensionale Fehler** treten meistens durch plastische Verformungen längs bestimmter Netzebenen auf. Da in Wirklichkeit nicht die ganze Netzebene auf einmal sondern nur ein Teil davon gleitet entstehen mehrdimensionale Defekte, sogenannte *Versetzungen* oder *Dislokationen*. Im zweidimensionalen Fall spricht man von einer *Stufenversetzung*. Dies kann man sich als ein reguläres Gitter vorstellen, in das eine unvollständige Netzebene eingeschlossen ist, die in einer Versetzungslinie endet. Ein einfaches Beispiel für einen dreidimensionalen Defekt ist die *Schraubenversetzung*, die man sich durch eine Versetzungslinie, die in Richtung der Scherkraft verläuft, vorstellen kann, eben schraubenförmig.

## 1.2 Festkörperbindungen

Festkörper werden durch anziehende Kräfte, die *Kohäsionskräfte* gebunden. Sie wirken den auseinandertreibenden Kräften wie zum Beispiel der abstoßenden Kräfte der Elektronenhüllen entgegen und sorgen somit für den Zusammenhalt von Feststoffen. Dadurch entstehen die nun besprochenen Bindungstypen.

### 1.2.1 Ionare Bindungen

Die Ionaren Bindungen werden durch die Coulombkraft hervorgerufen. In den Kristallen gehen Elektronen von einem Atom auf ein anderes über, dadurch entstehen unterschiedlich geladene Ionen. Diese ziehen sich gegenseitig an, zum Beispiel  $Na^+$  und  $Cl^-$  beim Kochsalz.

### 1.2.2 Kovalente Bindungen

Sie kommen dadurch zustande, dass sich zwei Valenzelektronen benachbarter Atome verbinden, und sich gemeinsam auf den Hüllen der beiden beteiligten Atome bewegen. Jedoch sind diese Bindungen über längere Zeiträume gemittelt elektrisch neutral.

### 1.2.3 Van-der-Waals-Bindungen

Durch eine kurzzeitige Ladungsverschiebung in der Elektronenhülle eines Teilchens, dessen temporäres Dipolmoment in den benachbarten Teilchen jeweils ein antiparalleles Dipolmoment induziert, entstehen die Van-der-Waals-Bindungen, also durch Kräfte zwischen antiparallel angeordneten Dipolen. Diese Wechselwirkung führt zu einer schwachen anziehenden Coulombkraft.

### 1.2.4 Metallische Bindungen

Metallische Bindungen hält das aus Valenzelektronen herrührende Elektronengas die dreidimensionalen, positiv geladenen, Atomrümpfe zusammen. Elektronengas ist eine Modellvorstellung des italienischen Physikers Enrico Fermi. Es handelt sich um nahezu frei bewegliche, *delokalisierte* Außenelektronen, die aufgrund ihrer relativ großen Entfernung vom Atomkern von diesem nur noch sehr Schwach angezogen werden. Siehe [3,4]

## 1.3 Elastizität und Verformung

Werden Festkörper äußeren Kräften ausgesetzt können sie sich verformen. Je nachdem, ob die angreifenden Kräfte bestimmte Grenzwerte überschreiten erfolgen diese Verformungen *reversibel* oder *irreversibel*. Bei einer reversiblen gehen die Verformungen nach dem Abklingen der angreifenden Kraft wieder zurück, der Körper nimmt also seine ursprüngliche Form wieder an. Diesen Punkt nennt man *Elastizitätsgrenze*. Wird dieser überschritten entstehen irreversible Formänderungen, der Körper geht also nicht mehr ganz in die Urform zurück. Erhöht man die angreifende Kraft noch weiter, stößt man irgendwann an die Bruchgrenze. Wird sie überschritten reißt der Körper auseinander oder bricht. Dieses Verhalten lässt sich an einer, für jeweils ein Material charakteristischen, Spannungs-Dehnungs-Kurve darstellen, auf diese kommen wir später noch zurück, erst gilt es noch die Begriffe Spannung und Dehnung zu erklären.

### 1.3.1 Spannung und Dehnung

Wenn eine Kraft tangential zur Oberfläche eines Körpers angreift, verformt sich dieser um einen Winkel  $\alpha$ . Den Quotienten aus Kraft und Fläche nennt man Scherspannung  $\tau$ :

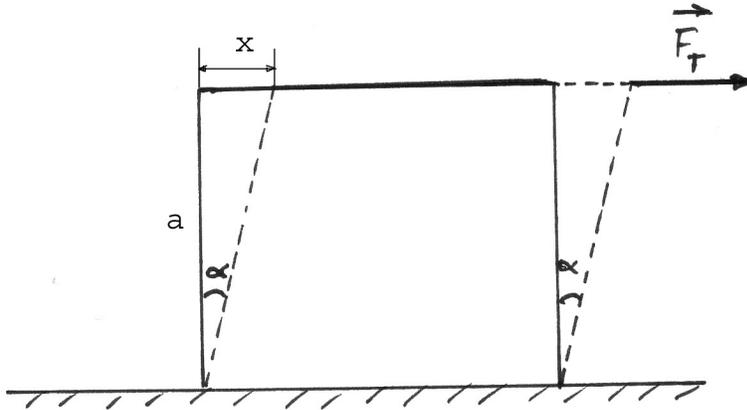


Abbildung 2: Darstellung der Scherspannung

$$\tau = \frac{F_T}{A} \quad (1)$$

Greift eine Kraft senkrecht und nach außen oder innen gerichtet an einer Oberfläche eines Körpers an, wird dieser Körper unter Zug oder Druck belastet. Der Quotient aus angreifender Kraft und der Fläche, auf die diese Kraft wirkt, bezeichnet man als Spannung  $\sigma$ , je nach Richtung auch als Zug- oder Druckspannung. Es gilt

$$\sigma = \frac{F_S}{A} \quad (2)$$

Wenn diese Kraft gleichmäßig verteilt auf einen Körper mit der Länge  $l$  wirkt, erfährt dieser eine Längenänderung  $\Delta l$ . Den Quotienten aus Längenänderung und Länge nennt man Dehnung  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3)$$

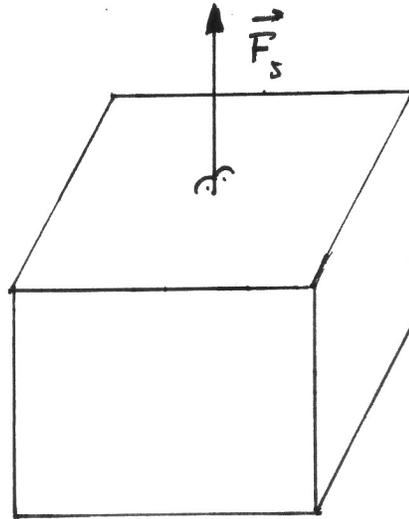


Abbildung 3: Darstellung der Zugspannung

**Die Poissonzahl:** Es tritt noch eine weitere Änderung auf, wenn man einen Körper dehnt. Die Dicke nimmt um  $\Delta d$  ab, man spricht hier von *Querkontraktion*. Für einen Körper mit quadratischer Grundfläche gilt somit

$$\frac{\Delta d}{d} \sim \frac{\Delta l}{l}$$

Die dazugehörige Proportionalitätskonstante ist dann die Poisson-Zahl  $\mu$ :

$$\mu = -\frac{\Delta d \cdot l}{d \cdot \Delta l} = \text{const.}$$

Genauereres hierzu findet sich in [5].

### 1.3.2 Die Spannungs-Dehnungs-Kurve

Man kann hiermit das Verhalten eines Körpers wie schon erwähnt charakteristisch für jedes Material darstellen. Interessant ist vielleicht noch zu erwähnen, dass wenn eine Zugspannung angreift zunächst eine zur Zugspannung proportionale Längenänderung stattfindet, Spannung und Dehnung hängen also bis zur Proportionalitätsgrenze linear voneinander ab. Wird die Elastizitätsgrenze überschritten bleibt eine irreversible Verformung bestehen. Die Spannung hat ihr Maximum an der Bruchgrenze. Hier beginnt der Körper zu reißen. Dehnt man ihn noch weiter, reißt er schließlich ganz ab.

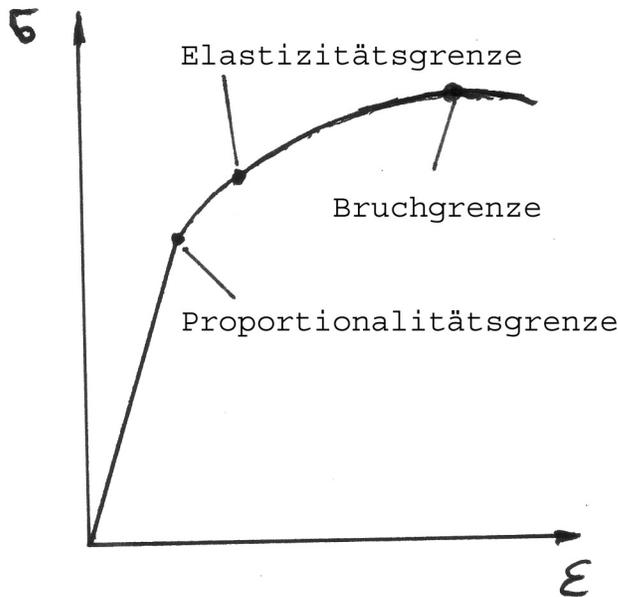


Abbildung 4: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

## 1.4 Die Elastischen Moduln

### 1.4.1 Schubmodul

Als *Schubmodul* bezeichnet man den Quotienten aus Tangentialspannung bzw. Scherspannung und dem Winkel  $\alpha$  (siehe Bild neben Formel (1)). Es muss also eine Kraft parallel zur Oberfläche des Körpers wirken, wodurch dieser eine Scherung um diesen Winkel erfährt. Dabei wird die Fläche um eine Strecke  $x$  aus ihrer Ruhelage verschoben.

$$G = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{F_T}{A\alpha}$$

Nun kann man noch für kleine Winkel die Näherung  $\tan \alpha = \alpha$  durchführen. Es folgt dann

$$G = \frac{F_T \cdot a}{Ax}$$

### 1.4.2 Elastizitätsmodul

Das *Elastizitätsmodul* gilt für den Hookeschen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Kurve. Es gibt das Verhältnis von (Schub- oder Zug-) Spannung zur Dehnung wieder, also

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Fl}{A\Delta l}$$

### 1.4.3 Kompressionsmodul

Wenn ein Körper mit dem Volumen  $V$  einen allseitigen Druck  $p$  erfährt, bewirkt dies eine Volumenänderung. Deshalb wird ein *Kompressionsmodul* wie folgt definiert

$$K = -V \cdot \frac{dp}{dV}$$

Den Kehrwert hiervon bezeichnet man als *Kompressibilität*

$$\kappa = \frac{1}{K}$$

## 1.5 Biegung eines einseitig eingespannten Balkens

Hier werden nun die für diesen Versuch wichtigen Formeln hergeleitet. Die Herleitungen wurden im wesentlichen aus [6] übernommen.

### 1.5.1 Berechnung des E-Moduls aus der Dehnung

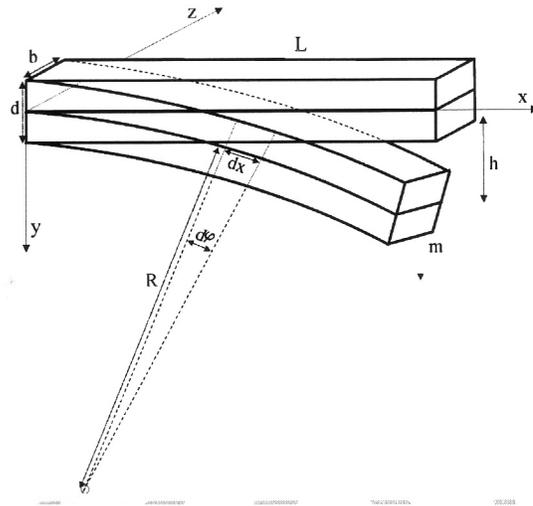


Abbildung 5: zur Herleitung beim gebogenen Balken

Bernoulli entwickelte eine Theorie, die davon ausgeht, dass der gebogene Balken überall die selbe Querschnittsfläche besitzt. Denkt man sich den Balken in viele Schichten zerlegt, gibt es eine *neutrale Faser*. Diese erfährt bei der Biegung keine Längenänderung. Darüberliegende Schichten werden gedehnt, darunter gelegene gestaucht. Die im Abstand  $y$  von der neutralen Faser gelegenen Schicht beträgt:

$$\frac{(R+y) \cdot d\varphi - R \cdot d\varphi}{dx} = y \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{y}{R}$$

Die Kraft die an einem Querschnittselement  $dz \cdot dy$  angreift, ist nach der Definition des E-Moduls gegeben durch

$$dF = \frac{E y}{R} \cdot dz \cdot dy$$

aufintegriert folgt  $F = \frac{E}{R} \cdot \int \int y \cdot dz \cdot dy$

Die neutrale Faser geht also immer durch den Schwerpunkt des Querschnitts. Bei nimmt dieses Integral den Wert Null an.

Das Drehmoment der elastischen Kräfte, welches den Querschnitt um eine Parallele zur z-Achse zu drehen versucht ergibt sich zu

$$|M| = \int y \cdot dF = \frac{E}{R} \int \int y^2 \cdot dz \cdot dy = \frac{E}{R} \cdot I$$

Hierbei ist  $I$  das Flächenträgheitsmoment

$$I = \int \int y^2 \cdot dz \cdot dy$$

Integriert man nun  $z$  von 0 bis  $b$  und  $y$  von  $-\frac{b}{2}$  bis  $\frac{b}{2}$  folgt

$$I = \frac{1}{12} b d^3$$

Das Drehmoment, welches durch die Masse  $m$  verursacht wird, beträgt

$$|\tilde{M}| = mg(L - x)$$

Setzt man dies in die Gleichgewichtsbedingung für die Drehmomente ein folgt

$$\frac{EI}{R} = mg(L - x)$$

Für die Krümmung gilt

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{mg}{EI} (L - x)$$

Wie man Abbildung 5 entnehmen kann ist hier die Krümmung in positiver x-Richtung relevant. Da für  $x = 0$  sowohl  $x$  als auch  $dx / dy$  verschwinden, müssen bei der zweimaligen Integration keine Integrationskonstanten berücksichtigt werden. Dies ergibt dann

$$y(x) = \frac{mg}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

Hieraus ergibt sich für das Elastizitätsmodul am freien Ende:

$$E = \frac{4L^3 mg}{bd^3 h} \quad (4)$$

### 1.5.2 Berechnung des E-Moduls aus der Frequenz der Biegeschwingung

Dies benötigt man für die Auswertung des zweiten Versuchsteils. Die Herleitung entstammt [7]. Man betrachtet eine differentiell kleine Massenscheibe im Abstand  $\tilde{x}$  der Dicke  $d\tilde{x}$ . Die Masse  $dm = \rho A d\tilde{x}$  der Scheibe wird bei der Schwingung durch eine Kraft  $dF = dm\ddot{z}(\tilde{x})$  beschleunigt. Diese Kraft erzeugt an der betrachteten Stelle  $x$  ein äußeres Drehmoment.

$$dM_a = dF(\tilde{x} - x) = dm\ddot{z}(\tilde{x})(\tilde{x} - x)$$

Aufintegriert über alle Massenscheibchen von  $x$  bis  $L$  ergibt sich

$$\begin{aligned} M_a &= \rho A \int_x^L \ddot{z}(\tilde{x})(\tilde{x} - x) d\tilde{x} \\ &= \rho A \int_x^L \ddot{z}(\tilde{x})\tilde{x} d\tilde{x} - \int_x^L \ddot{z}(\tilde{x})x d\tilde{x} \end{aligned}$$

Um nach der Beschleunigung auflösen zu können differenziert man nach  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_a}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \rho A \left( -x\ddot{z}(x) + \int_L^x \ddot{z}(\tilde{x}) d\tilde{x} + x\ddot{z}(x) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \int_L^x \ddot{z}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= \rho A \ddot{z}(x) \end{aligned} \tag{5}$$

Für das innere Drehmoment gilt

$$M_i = -\frac{Ed^3b}{12} z''(x) = -\frac{Ed^2A}{12} z''(x)$$

Hiervon die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2 M_i}{dx^2} = -\frac{Ed^2A}{12} \frac{d^4 z(x)}{dx^4} \tag{6}$$

Setzt man jetzt die beiden Ableitungen (5) und (6) gleich, so erhält man

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{Ed^2}{12\rho} \frac{d^4 z}{dx^4}$$

Mit den entsprechenden Anfangswerten lässt sich diese Differentialgleichung lösen. Es ergibt sich

$$z(x, t) = \hat{z}_n(x) \sin(2\pi\nu_n t + \phi_n)$$

Daraus folgt mit (n=1) die gesuchte Grundfrequenz

$$\nu_1 = \frac{1,875^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{Ed^2}{12\rho}}$$

Für die Auswertung müssen wir nun nur noch diese Formel nach E umstellen:

$$E = \left( \frac{2\pi L^2}{T_1 \cdot 1,875^2} \right)^2 \cdot \frac{12\rho}{d^2} \quad (7)$$

## 1.6 Der Tensorcharakter der elastischen Konstanten

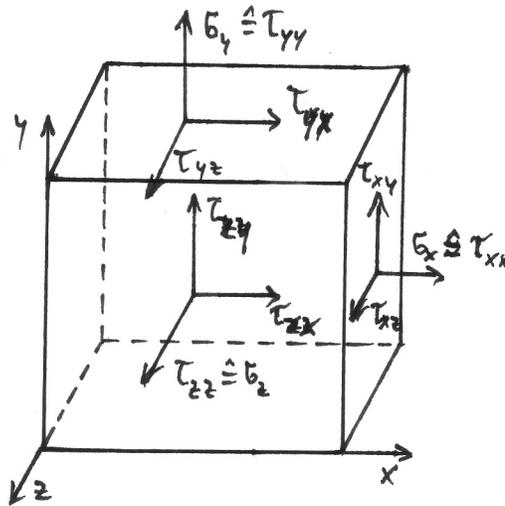


Abbildung 6: Spannungstensor

Wenn auf einen Festkörper zur gleichen Zeit mehrere Kräfte in unterschiedliche Raumrichtungen wirken führt dies zur Überlagerung verschiedenster Dehnungen, Stauchungen, Scherungen und Kompressionen. Es wirken auf sämtliche Oberflächen von kubischen oder quaderförmigen Körpern verschiedene Kräfte, die man jeweils in ihre x-, y- und z-Komponente (für ein kartesisches Koordinatensystem) zerlegen kann.

Somit wirken auf jede Oberfläche jeweils orthogonal zwei Scherspannungen und eine Zugspannung. Der erste Index steht dabei jeweils für die Kraftrichtung, der zweite für die jeweilige Flächennormale (siehe Bild). Somit kann man den Spannungstensor  $\hat{\sigma}$  wie folgt angeben:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Ein weiterer Tensor wird verwendet, um die Verformung näher beschreiben zu können. In diesem tauchen die Längenänderungen  $\epsilon_i$  und die Scherwinkel  $\alpha_i$ :

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \epsilon_y & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

Man kann also das Hookesche Gesetz im allgemeinsten Fall mit Tensoren formulieren:

$$\hat{\sigma} = \hat{C} \cdot \hat{\epsilon}$$

Für den Tensor  $\hat{C}$  gibt es maximal 81 Elemente, man nennt sie *elastische Konstanten*. Jedoch kann man aufgrund von Symmetrien, die z.B. von den thermodynamischen Gegebenheiten oder dem Aufbau des Kristalles auf einundzwanzig bis drei unabhängige Konstanten reduzieren.



## 2.2 Bestimmung des E-Moduls mit dem dynamischen Verfahren

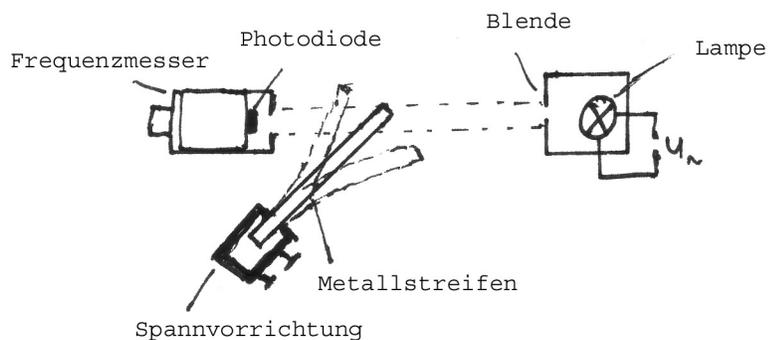


Abbildung 8: Dynamische Bestimmung des E-Moduls

Beim zweiten Versuchsteil nimmt man einen der Metallstreifen aus Teil 1, spannt diesen ein und misst die freie Länge  $l$ . Nun wird der Metallstab an die Messvorrichtung herangeführt und das System so justiert, dass der nicht-schwingende Metallstreifen den Lichtstrahl zur Photodiode gerade abdeckt. Dann versetzt man den Streifen in Schwingung und misst die Periodendauer  $T$ . Diesen Vorgang führt man für insgesamt vier unterschiedliche Einspannlängen jeweils zehnmal durch. Hier verwendet man nun zur Auswertung Formel (7):

$$E = \left( \frac{2\pi L^2}{T_1 \cdot 1,875^2} \right)^2 \cdot \frac{12\rho}{d^2}$$

### 3 Versuchsauswertung

Genauigkeit der Messmittel	
Waage	0,001 g
Messschieber	0,05 mm
Bügelmessschraube	0,01 mm
Lineal	0,1 cm

Massen der Gewichtsstückchen $m_{\text{Gewicht}}$ in [g]			
1,087	1,093	1,102	1,083
1,097	1,088	1,091	1,106
1,102	1,104		
Arithmetisches Mittel:			1,0953 g
Standardabweichung:			0,0025 g

Masse der Schale  $m_{\text{Schale}}$ : 4,086 g

#### Messungen für den Aluminiumstreifen

Dichte in  $\text{kg/dm}^3$  (Tabelle): 2,702

#### Breite b in mm

20,25	20,40	20,35	20,40
20,40	20,30	20,25	

Arithmetisches Mittel: 20,336 mm  
Standardabweichung: 0,026 mm

#### Dicke d in mm

0,53	0,53	0,54	0,54
0,53	0,52	0,52	

Arithmetisches Mittel: 0,530 mm  
Standardabweichung: 0,003 mm

#### Messungen für den Kupferstreifen

Dichte in  $\text{kg/dm}^3$  (Tabelle): 8,933

#### Breite b in mm

19,90	19,85	19,90	19,90
19,95	19,95	19,95	

Arithmetisches Mittel: 19,914 mm  
Standardabweichung: 0,014 mm

#### Dicke d in [mm]

0,51	0,52	0,51	0,51
0,52	0,51	0,51	0,51

Arithmetisches Mittel: 0,513 mm  
Standardabweichung: 0,002 mm

### 3.1 Statische Methode

Nun wird die Messung wie in 2.1 beschrieben durchgeführt und den E-Modul berechnet. Es ergeben sich folgende Werte:

Aluminiumstreifen, Einspannlänge  $l = 26,6\text{cm}$ :

F in mN	h1 in mm	h2 in mm	h3 in mm	h4 in mm	h* in mm	s* in mm	E in G Pa	$\delta E$ in G Pa
40.08	15.0	14.5	14.5	15.0	14.8	0.144	67.569	4.526
50.83	18.5	18.5	18.0	19.0	18.5	0.204	68.322	4.358
61.57	23.0	22.5	22.0	23.0	22.6	0.239	67.669	4.186
72.32	27.0	26.5	26.0	27.0	26.6	0.239	67.543	4.103
83.06	31.0	30.5	29.5	31.0	30.5	0.354	67.718	4.067
93.81	35.0	34.5	33.5	35.0	34.5	0.354	67.615	4.027
104.55	39.0	38.5	37.5	39.0	38.5	0.354	67.527	3.998
115.30	43.0	41.5	41.0	43.0	42.1	0.515	68.061	4.019
126.04	47.0	45.5	44.0	47.0	45.9	0.718	68.319	4.089
136.79	50.5	49.5	47.0	50.5	49.4	0.826	68.890	4.143
147.53	54.5	53.5	51.0	54.5	53.4	0.826	68.731	4.111

h\* ist das arithmetische Mittel der Biegepeile, s\* die dazugehörige Standardabweichung

Arithmetisches Mittel des E-Moduln: 67.997 G Pa  
 Standardabweichung des E-Moduln: 0.151 G Pa  
 Arithmetisches Mittel des Gaussfehlers: 4.148 G Pa

Somit ergibt sich für Aluminium ein E-Modul von  $67,997 \pm 4,148\text{GPa}$ .

Kupferstreifen, Einspannlänge  $l = 26,5\text{cm}$ :

F in mN	h1 in mm	h2 in mm	h3 in mm	h4 in mm	h* in mm	s* in mm	E in G Pa	$\delta E$ in G Pa
40.08	11.0	11.0	11.5	11.0	11.1	0.125	99.750	7.448
50.83	14.0	14.0	14.5	14.0	14.1	0.125	99.637	6.909
61.57	17.0	17.0	17.5	17.0	17.1	0.125	99.546	6.608
72.32	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	0.000	100.119	6.473
83.06	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	0.000	99.989	6.345
93.81	26.0	26.0	26.0	26.5	26.1	0.125	99.421	6.225
104.55	29.0	29.0	29.0	30.0	29.3	0.250	98.966	6.138
115.30	32.0	31.5	32.0	32.5	32.0	0.204	99.762	6.149
126.04	35.0	34.5	35.0	35.5	35.0	0.204	99.707	6.113
136.79	38.0	38.0	38.0	38.5	38.1	0.125	99.342	6.064
147.53	41.0	41.0	40.5	41.5	41.0	0.204	99.628	6.063

h\* ist das arithmetische Mittel der Biegepeile, s\* die dazugehörige Standardabweichung

Arithmetisches Mittel des E-Moduln: 99.624 G Pa  
 Standardabweichung des E-Moduln: 0.094 G Pa  
 Arithmetisches Mittel des Gaussfehlers: 6.412 G Pa

Der E-Modul beträgt laut Versuch  $99,624 \pm 6,412\text{GPa}$

Der Gauss-Fehler  $\delta E$  wird nach folgender Formel berechnet:

$$\delta E =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial m_S} \Delta m_S\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial m_G} \Delta m_G\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial h} \Delta h\right)^2}$$

mit  $m = m_{\text{Schale}} + m_{\text{Gewicht}}$

### 3.2 Dynamische Methode

Die in 2.2 beschriebenen Messungen und Berechnungen liefern für den Aluminiumstreifen folgende Werte:

Fehler der Uhr: 1 ms

#### 1. Messung l=150 mm

T in s	E in Gpa	δE in Gpa
0.0542	63.421	3.757
0.0543	63.188	3.741
0.0540	63.892	3.791
0.0542	63.421	3.757
0.0541	63.656	3.774
0.0543	63.188	3.741
0.0543	63.188	3.741
0.0541	63.656	3.774
0.0543	63.188	3.741
0.0544	62.956	3.724

Mittlere Periodendauer: 0.054  
Standardabweichung: 0.00004

#### 2. Messung, l=175 mm

T in s	E in Gpa	δE in Gpa
0.0729	64.948	3.381
0.0728	65.127	3.391
0.0726	65.486	3.413
0.0727	65.306	3.402
0.0728	65.127	3.391
0.0729	64.948	3.381
0.0728	65.127	3.391
0.0727	65.306	3.402
0.0729	64.948	3.381
0.0728	65.127	3.391

Mittlere Periodendauer: 0.073  
Standardabweichung: 0.00003

#### 3. Messung, l=200 mm

T in s	E in Gpa	δE in Gpa
0.0969	62.711	2.980
0.0970	62.582	2.974
0.0967	62.970	2.994
0.0972	62.324	2.960
0.0969	62.711	2.980
0.0971	62.453	2.967
0.0971	62.453	2.967
0.0969	62.711	2.980
0.0971	62.453	2.967
0.0970	62.582	2.974

Mittlere Periodendauer: 0.097  
Standardabweichung: 0.00005

#### 4. Messung l=225 mm

T in s	E in Gpa	δE in Gpa
0.1224	62.956	2.826
0.1223	63.059	2.831
0.1227	62.648	2.811
0.1225	62.853	2.821
0.1225	62.853	2.821
0.1228	62.546	2.806
0.1223	63.059	2.831
0.1220	63.369	2.846
0.1218	63.578	2.856
0.1217	63.682	2.861

Mittlere Periodendauer: 0.122  
Standardabweichung: 0.00012

Arithmetisches Mittel des E-Moduln: 63.544  
Standardabweichung: 0.160  
Mittlerer Gaussfehler: 3.238

Es ergibt sich ein Wert für den E-Modul von Aluminium von  $63,544 \pm 3,238 \text{ GPa}$   
Hier berechnet man den Gauss-Fehler nun folgendermaßen:

$$\delta E = \sqrt{\left(\frac{192\rho\pi^2 l^3}{(1,875)^4 d^2 T^2} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\frac{96\rho\pi^2 l^4}{(1,875)^4 d^3 T^2} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{96\rho\pi^2 l^4}{(1,875)^4 d^2 T^3} \cdot \Delta T\right)^2}$$

## 4 Fehlerdiskussion und Vergleich der Methoden

Der für die statische Methode ermittelte Wert für den Aluminiumstreifen (68 GPa) liegt mit einer Abweichung von gerademal 2,8 % recht nahe an dem Tabellenwert von 70 GPa. Der Wert für den Kupferstreifen (99,62 GPa) hingegen weicht um 22,2 % vom Tabellenwert 128 GPa ab. Wir gehen davon aus, dass die Ursache hierfür in einer Materialermüdung des Kupferstreifens liegt. Vermutlich wurde dieser schon mehrfach bis über die Elastizitätsgrenze beansprucht und ist somit nicht mehr wirklich brauchbar für diesen Versuch. Des weiteren kommt hierfür im Wesentlichen noch eine weitere Ursache in Betracht, und zwar Fehler bei der Längenmessung. Jedoch spricht hierbei dagegen, dass für alle vier Einspannungen des Kupferstreifens doch recht konstante Werte vorliegen.

Betrachtet man die dynamische Methode fällt auf, dass der ermittelte Durchschnittswert für den E-Modul des Aluminiumstreifens (63,54 GPa) mit 9,2 % deutlich stärker vom Tabellenwert abweicht. Wir vermuten, dass dies in erster Linie an Ungenauigkeiten bei der Längenmessung liegen muss, denn, wie sich aus der Formel für den Gaussfehler ablesen lässt, fließt diese am meisten in die Fehlerfortpflanzung ein, und zudem hat sie die größte Ungenauigkeit.

## Literatur

- [1] Christian Gehrtsen, *Physik*, Springer Verlag, 22. Auflage  
S. 815ff.
- [2] ebenfalls Gehrtsen,  
S. 871ff.
- [3] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Verlag, 3. korrigierter Nachdruck 2000 der  
1. Auflage 1994  
S. 1317
- [4] [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org), Suchbegriff *Metallische Bindung*, Artikel vom 06.10.2005,  
Wikimedia Foundation Inc., St. Petersburg, FL, USA
- [5] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik*, Springer Verlag, 3. Auflage , kor-  
rigierter Nachdruck 2004  
S. 161ff.
- [6] Michael Rill, Rafael Lang, *Grundpraktikum der Physik 2000, Versuch 7: Elas-  
tizitätskonstante von kristallinen Festkörpern*, Ulm, Universität Ulm
- [7] Günther Prinz, Frank Sperka, *Grundpraktikum der Physik WS 1998/99, Ver-  
such 7: Elastizitätskonstante von kristallinen Festkörpern*, Ulm, Universität  
Ulm