

# Versuch Nr. 7

## Elastizitätskonstante von kristallinen Festkörpern

Andreas Josef Birnesser

[Andreas.Birnesser@wirtschaftsphysik.de](mailto:Andreas.Birnesser@wirtschaftsphysik.de)

Sascha Wagner

[Sascha.Wagner@wirtschaftsphysik.de](mailto:Sascha.Wagner@wirtschaftsphysik.de)

02. Oktober 2000

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Theoretische Grundlagen.....</b>	<b>4</b>
1.1. Aufbau von Festkörpern.....	4
1.2. Bindungen von Festkörpern.....	5
1.3. Elastische Moduln.....	6
1.3.1. Spannung und Dehnung .....	6
1.3.2. Spannungs – Dehnungs – Kurve .....	6
1.3.3. Das Elastizitätsmodul.....	7
1.3.4. Das Schubmodul .....	8
1.3.5. Das Kompressionsmodul.....	9
1.3.6. Beziehungen zwischen den elastischen Konstanten.....	9
1.4. Tensorcharakter der elastischen Konstanten.....	10
1.5. Biegung eines einseitig eingespannten Balkens .....	11
<b>2. Versuchsbeschreibung.....</b>	<b>13</b>
2.1. Statistisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls .....	13
2.2. Dynamisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls.....	14
<b>3. Versuchsauswertung.....</b>	<b>15</b>
3.1. Statistisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls .....	15
3.1.1. Gewichtsbestimmungen mit einer Waage:.....	15
3.1.2. Bestimmen der Abmessungen des Metallstreifens: .....	15
3.1.3. Elastizitätsmodul des Aluminiumstreifens.....	16
3.1.4. Elastizitätsmodul des Kupferstreifens .....	17
3.2. Dynamisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls.....	19
3.2.1. Elastizitätsmodul des Aluminiumstreifens.....	19
3.2.2. Elastizitätsmodul des Kupferstreifens .....	20
3.3. Diagramme.....	23
<b>4. Fehlerdiskussion.....</b>	<b>25</b>

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm .....	6
Abbildung 2: Scherung .....	8
Abbildung 3: Zur Definition des Spannungstensors .....	10
Abbildung 4: Biegung eines Balkens.....	11
Abbildung 5: Versuchsaufbau statische Methode.....	13
Abbildung 6: Versuchsaufbau dynamische Methode .....	14
Abbildung 7: Biegung eines Aluminiumstabes .....	23
Abbildung 8 : Biegung eines Kupferstabes .....	23
Abbildung 9: Abhängigkeit von Masse und Auslenkung.....	24

# 1. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

## 1.1. Aufbau von Festkörpern

Für den Aufbau von Festkörpern gibt es prinzipiell zwei verschiedene Möglichkeiten. Einerseits die *amorphe Form*, bei der das Gitter keine Fernordnung aufweist und andererseits die *kristalline Form*, mit der regelmäßigen Anordnung der atomaren Bausteine.

**Amorphe Form:** Amorphe Körper besitzen in ihrem Aufbau keinerlei Struktur. Sie entstehen in der Modellvorstellung dann, wenn man eine Flüssigkeit so schnell abkühlt, d.h. ihr so schnell die innere Energie entzieht, dass sich die Moleküle nicht zu einer neuen geordneten Struktur anordnen können. Amorphe Körper besitzen keinen definierten Schmelzpunkt, sondern sie gehen beim Erwärmen allmählich in den echten flüssigen Zustand über. In der Literatur werden sie deshalb häufig den Flüssigkeiten mit einer sehr hohen, aber endlichen Viskosität zugeordnet. Beispiele sind Ruß, Wachs, Teer oder auch Glas.

**Kristalline Form:** Die Struktur aller kristallinen Körper ist durch eine bestimmte, regelmäßige räumliche Anordnung gekennzeichnet. Man kann ihre Struktur anhand eines Modells verdeutlichen. Als Ausgangspunkte wählt man sogenannte Basisatome bzw. Basismoleküle, die in periodischen Abständen aneinandergereiht sind. Die Periodizität erlaubt es, das Gitter als Vielfaches einer Einheit, der Elementarzelle, zu beschreiben. Auguste Bravais (1811 – 1893) wies auf mathematischem Wege nach, dass es 14 mögliche Formen dieser Elementarzelle gibt. Die 14 Bravaiszellen lassen sich zu sieben Kristallfamilien zusammenfassen: *triklin*, *monotriklin*, *rhombisch*, *tetragonal*, *hexagonal*, *trigonal* und *kubisch*. Das Gitter des kristallinen Körpers lässt sich durch Symmetrioperationen auf die jeweilige Bravaiszelle aufbauen. Alle Bereiche des kristallinen Festkörpers befinden sich daher in einer wohldefinierten Lage bzw. Orientierung zueinander. Diese Eigenschaft des kristallinen Festkörpers ist in der Festkörperphysik enorm wichtig und wird als Fernordnung bezeichnet.

Der **ideale Kristall** ist durch eine streng gesetzmäßige Anordnung der Atome oder Ionen definiert. Die Realkristalle unterscheiden sich aufgrund ihres Entstehungsprozesses von den Idealkristallen dadurch, dass sie Fehlern aufweisen.

Man klassifiziert diese Kristallbaufehler nach ihrer Dimensionalität. Die null-dimensionalen Fehlern werden als *Punktfehler* bezeichnet, die eindimensionalen sind die sogenannten *Versetzungen* und zu den *zweidimensionalen* gehören Flächen im Kristall, an denen die Gitterperiodizität unterbrochen ist.

**Punktfehler:** Der einfachste denkbare Punktfehler besteht darin, dass ein Atom irgendwo in der Struktur fehlt. Statt dessen befindet sich an diesem Platz eine Leerstelle. Derartige Punktfehler bezeichnet man als *Schottky – Defekte*. Umgekehrt kann auch ein zusätzliches Atom der gleichen Art in der Gitterstruktur vorhanden sein. Es befindet sich dann als Zwischengitteratom auf einem Zwischengitterplatz. Diese Fehlern nennt man *Anti – Schottky – Defekt*. Treten beide Defekte gekoppelt auf, so dass ein Atom seinen Platz in der Gitterstruktur verlässt und sich an einer Zwischengitterstelle einlagert, so spricht man von *Frenkel – Defekten*. Aufgrund der thermischen Energie eines kristallinen Körpers sind die genannten Punktfehler stets vorhanden und werden auch Eigenfehlern genannt.

**Chemische Fehlern** treten auf, wenn Fremdatome auf regulären Gitterplätzen oder auch Zwischengitterplätzen eingebaut werden. Sind die Fremdatome wesentlich kleiner als die Atome des Gitters, so werden sie meist in das Zwischengitter eingebaut. Dies wirkt sich auch auf die optischen und elektrischen Eigenschaften des kristallinen Festkörpers aus.

**Versetzungen:** Eine Versetzung kann im Modell folgendermaßen verdeutlicht werden. Bei der Schraubenversetzung wird der Kristall entlang einer Schnittfläche teilweise aufgetrennt. Dann wird ein Teil der Netzebene, im Grenzfall nur eine Atomschicht, um einen geringen Betrag nach unten versetzt und anschließend wird der Kristall wieder zusammengesetzt. Bei der Stufenversetzung wird eine Ebene bis zur Schnittlinie eingefügt. Im Realfall kann eine solche Versetzung durch äußere Krafteinwirkungen entstehen.

**Zweidimensionale Defekte:** An der Korngrenze stoßen jeweils zwei Kristallindividuen aneinander. Zur Kennzeichnung muss die gegenseitige Orientierung der Körner genau bestimmt werden. Zu den zweidimensionalen Defekten gehören beispielsweise die Oberflächen jedes realen Kristalls.

Kristalline Körper, welche nur Punktfehler und Versetzungen aufweisen, werden als **Einkristalle** bezeichnet. Ist der Festkörper jedoch aus zwei gegeneinander verdrehten Einkristallen zusammengesetzt, so spricht man von einem **Bikristall**. Bei einem **Polykristall** treten im Festkörper viele verschieden orientierte Einkristalle auf.

Betrachtet man die physikalischen Eigenschaften, wie z.B.: Wärmeleitfähigkeit, elektrische Leitfähigkeit, Lichtgeschwindigkeit etc., so gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten:

- a) Die physikalischen Eigenschaften sind in allen Richtungen gleich, d.h. invariant gegenüber der Rotation. Dieses Verhalten wird als **isotrop** bezeichnet.
- b) Die physikalischen Eigenschaften variieren mit der Richtung, in der sie gemessen werden. Dieses Verhalten wird als **anisotrop** bezeichnet.

Ist der Festkörper stofflich und physikalisch nicht einheitlich und gleichmäßig gebaut, so ist er **heterogen**. Erweist er sich bezüglich seiner stofflichen Eigenschaften als Einheit, so ist er **homogen**.

## 1.2. Bindungen von Festkörpern

Der Aufbau der Kristallstruktur aus Atomen wird neben den geometrischen Prinzipien auch sehr stark von den zwischenatomaren Kräften beeinflusst. Diese Bindungskräfte treten in vier verschiedenen Bindungstypen zum Vorschein: Ionare, kovalente, metallische und Van – der – Waals – Bindungen.

**Ionare Bindungen:** Bei diesem Bindungstyp gehen ein oder mehrere Elektronen von einem Atom auf das andere über. So entstehen zwei gegensätzlich geladene, sich anziehende Ionen.

**Kovalente Bindung:** Diese Bindung kommt dadurch zustande, dass sich äußere Elektronen der beteiligten Atome zu Paaren verbinden und so gemeinsam im Potentialfeld beider Atome bewegen. Die beteiligten Atome bleiben im Unterschied zur Ionenbindung im zeitlichen Mittel elektrisch neutral.

**Metallische Bindungen:** Bei der metallischen Bindung wird die dreidimensionale Anordnung aus positiven Atomrümpfen vom Elektronengas, das von den Valenzelektronen herrührt, zusammengehalten.

**Van – der – Waals – Bindung:** Die Van – der – Waals – Bindung beruht auf einer schwach anziehenden Dipol-Dipol-Wechselwirkung. Diese tritt auf, wenn in den Kristallatomen oder -molekülen gegenseitig momentane Dipolmomente induziert werden. Die Wechselwirkung dieser induzierten Dipolmomente führt zu einer schwachen elektrischen Anziehungskraft.

### 1.3. Elastische Moduln

Festkörper können unter Einwirkung von äußeren Kräften ihre Form und ihr Volumen ändern. Bleibt die aufgebrachte Kraft unter einem Schwellenwert, so bilden sich die Veränderungen nach dem Wegnehmen der Kraft wieder zurück. Der Körper nimmt sein ursprüngliches Volumen und seine ursprüngliche Form ein. Diese Eigenschaft der Festkörper bezeichnet man als **Elastizität**.

Erfolgt diese Volumen- bzw. Formänderung mit annähernd Schallgeschwindigkeit im betreffenden Festkörper, so nennt man dieses Verhalten *Elastizität im engeren Sinne*. Beansprucht die Volumen- bzw. Formänderung mehr Zeit, als der Schall für die Durchquerung des Körpers benötigt, dann spricht man von **Anelastizität** oder **elastische Nachwirkung**.

Oft bleibt ein Teil der Verformung des Festkörpers nach der Wegnahme der Kraft bestehen und bildet sich auch nicht, wie beim anelastischen Verhalten, nach längerer Zeit zurück. Die Verformung ist *irreversibel*. Bei solchen Phänomenen, die von bleibender Dauer sind, spricht man von **plastischer Verformung**.

#### 1.3.1. Spannung und Dehnung

Unter der *Spannung*  $\mathbf{s}$  versteht man den Quotienten aus einer Kraft  $\mathbf{F}$  und der Fläche  $A$ , auf welcher die Kraft  $\mathbf{F}$  senkrecht im Zentrum angreift, d.h.

$$\mathbf{s} = \frac{F_{\perp}}{A} \quad (1.a)$$

Oft spricht man von einer Druck- bzw. Zugspannung.

Wirkt auf die Fläche eines Körpers der Länge  $l$  eine gleichmäßig verteilte senkrechte Kraftkomponente, so bewirkt diese eine Längenänderung  $\Delta l$ . Als *Dehnung*  $e$  definiert man:

$$e = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.b)$$

Greift die Kraft  $\mathbf{F}$  parallel zur Fläche  $A$  an, so erfährt der Körper die *Scherspannung*  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad (2)$$

#### 1.3.2. Spannungs – Dehnungs – Kurve

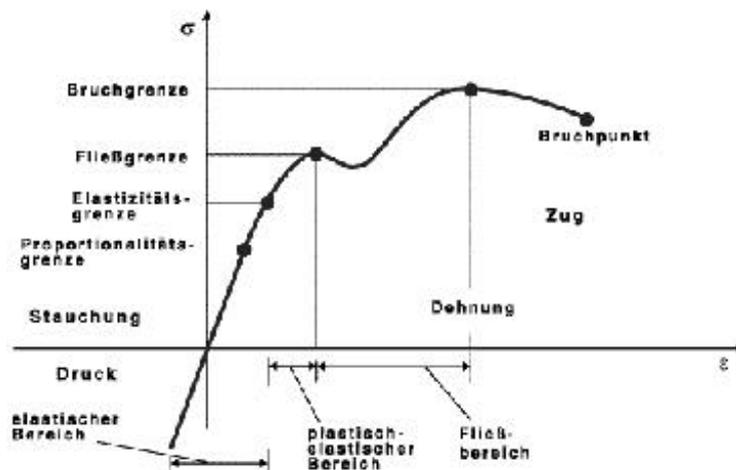


Abbildung 1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Mit den Größen  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{s}$  lässt sich das Verhalten eines gewöhnlichen Metalls bei angelegter Spannung darstellen. Obwohl dabei die Spannung die unabhängige und die Dehnung die abhängige Variable ist, hat es sich eingebürgert, auf die Ordinate solcher Spannungs – Dehnungs – Diagramme  $\mathbf{s}$  und auf der Abszisse  $\mathbf{e}$  abzutragen.

Bis zur Proportionalitätsgrenze hängen Spannung und Dehnung linear voneinander ab. In diesem Bereich gilt das **Hookesche Gesetz**  $\mathbf{s} \sim \mathbf{e}$ . Erhöht man die Spannung weiter, so folgt die Dehnung nicht mehr linear. Bis zum Erreichen der Elastizitätsgrenze ist jede Verformung reversibel. Man befindet sich im elastischen Bereich. Es schließt sich der plastische Bereich an, in dem die Verformung nicht mehr auf den Ausgangspunkt zurück geht. Aufgrund der Aufweichung der Struktur flacht die Kurve ab und der Körper beginnt zu fließen. Danach erreicht die Spannung wieder ein absolutes Maximum bei der Bruchgrenze, an welcher der Körper zu zerreißen beginnt. Die Spannung geht zurück und der Körper zerreißt am Bruchpunkt.

Mit Hilfe der Spannungs-Dehnungs-Kurve können „elastische Konstanten“ definiert werden. Diese charakterisieren die Verformbarkeit des Körpers, genauer gesagt geben sie den Widerstand an, den ein Körper einer Verformung entgegensetzt.

### 1.3.3. Das Elastizitätsmodul

Auf einen Körper mit der Oberfläche  $A$  wirkt die Zugspannung  $\mathbf{s}$ . Für den Hookeschen Bereich der Spannungs – Dehnungs – Kurve definiert man die Steigung der Kurve als **Elastizitätsmodul**  $E$ :

$$E = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{e}} = \frac{F \cdot l}{A \cdot \Delta l} \quad (3)$$

Beachte: das E-Modul ist bei Druck und Zug nicht unbedingt gleich groß, aber bei vielen Materialien trifft dies zu!

**Poissonsche – Zahl:** Außer einer Längenänderung tritt bei der Dehnung eines quaderförmigen Körpers mit quadratischer Grundfläche der Länge  $l$  auch eine Querkontraktion auf, d.h. die Dicke  $d$  nimmt um  $\Delta d$  ab. Es gilt nach dem Hookeschen Gesetz:

$$\frac{\Delta l}{l} \sim \frac{\Delta d}{d} \quad (4)$$

Die Proportionalitätskonstante heißt Poissonsche Zahl  $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} = -\frac{\Delta d \cdot l}{d \cdot \Delta l} = \text{const.} \quad (5)$$

Berechnung der Volumenänderung:

$$\begin{aligned} \Delta V &= (d - \Delta d)^2 \cdot (l + \Delta l) - d^2 \cdot l \\ &= (d^2 - 2 \cdot d \cdot \Delta d + (\Delta d)^2) \cdot (l + \Delta l) - d^2 \cdot l \\ &= d^2 \cdot l - 2 \cdot d \cdot \Delta d \cdot l + (\Delta d)^2 \cdot l + d^2 \cdot \Delta l - 2 \cdot d \cdot \Delta d \cdot \Delta l + (\Delta d)^2 \cdot \Delta l - d^2 \cdot l \\ &\approx d^2 \cdot \Delta l - 2 \cdot d \cdot \Delta d \cdot l \end{aligned} \quad (6)$$

Es ergibt sich aus Gleichung (6) die relative Volumenänderung zu:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} \cdot (1 - 2 \cdot \mathbf{m}) = \mathbf{e} \cdot (1 - 2 \cdot \mathbf{m}) = \frac{\mathbf{s}}{E} \cdot (1 - 2 \cdot \mathbf{m}) \quad (7)$$

### Herleitung der oberen Grenze der Poissonschen Zahl $\mathbf{m}$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta l \cdot (\Delta d)^2}{l \cdot d^2} = \frac{\Delta l}{l} \cdot (1 - 2 \cdot m) \\ \Rightarrow \frac{\Delta d^2}{d} &= 1 - 2 \cdot m \\ \Rightarrow m &= \frac{1}{2} - \frac{(\Delta d)^2}{d^2 \cdot 2}\end{aligned}\quad (8)$$

Aus Gleichung (8) folgt also, dass  $m \leq 0,5$ . Setzt man diesen Wert in Gleichung (7) ein, so ergibt sich mit  $e > 0$ , dass  $\Delta V > 0$ . Normalerweise liegt die Poissonsche Zahl  $m$  zwischen 0,2 und 0,5. Allerdings kann sie auch bei einigen Substanzen, wie z.B.: Holz, Knochen, Schwämme etc. negativ sein, d.h. bei einer angelegten Spannung dehnt sich der Körper in einem bestimmten Bereich in alle drei Raumrichtungen aus. Da Flüssigkeiten praktisch inkompressibel sind ergibt sich als Poissonsche Zahl 0,5.

### 1.3.4. Das Schubmodul

Auf die Oberfläche eines Körpers wirkt die Scherspannung  $t$ , wodurch die Seitenkanten des Körpers um den Winkel  $g$  (in rad) geschert werden. Das Volumen des Körpers bleibt konstant. Man definiert eine weitere elastische Konstante, den **Schubmodul**, welcher bei der Torsion und Scherung von Festkörpern eine wichtige Rolle spielt:

$$G = \frac{t}{g} = \frac{F_{\parallel}}{A \cdot g} \quad (9)$$

Diese Definition gilt jedoch nur für sehr kleine Winkel  $g \leq 10^{-3}$  rad. Dann kann  $g$  auch durch  $\tan g = \Delta a / a$  ersetzt werden. Daraus folgt :

$$G = \frac{F_{\parallel} \cdot a}{A \cdot \Delta a} \quad (10)$$

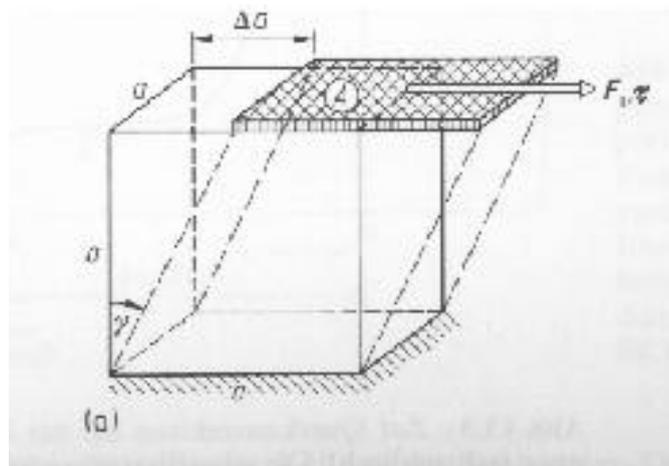


Abbildung 2: Scherung

### 1.3.5. Das Kompressionsmodul

Auf einen Quader mit dem Volumen  $V$  wirkt der allseitige Druck  $p$  und bewirkt die relative Volumenänderung  $\Delta V / V$ . Die sogenannte **Kompressibilität**  $k$  ist definiert als:

$$k = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \quad (11)$$

Ihr Kehrwert  $K$  heißt **Kompressionsmodul**:

$$K = \frac{1}{k} = -V \cdot \frac{dp}{dV} \quad (12)$$

### 1.3.6. Beziehungen zwischen den elastischen Konstanten

*Zusammenhang zwischen  $E$  und  $K$ :* Auf einen Würfel mit der Kantenlänge  $L_0$  und dem Volumen  $V_0 = L_0^3$  wirkt ein hydrostatischer, d.h. von allen Seiten gleich großer Druck. Die Spannung  $\mathbf{s}$  verkürzt die zu ihr parallelen Kanten um

$$\Delta L_1 = L_0 \cdot \frac{\mathbf{s}}{E}, \quad (13)$$

während die zu ihr senkrechten Kanten verlängert werden:

$$\Delta L_2 = L_0 \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{m} = L_0 \cdot \frac{\mathbf{s}}{E} \cdot \mathbf{m} \quad (14)$$

Jede Kante wird bei allseitigem Druck genau einmal verkürzt und zweimal gedehnt, daraus ergibt sich die neue Kantenlänge  $L$ :

$$L = L_0 + L_1 + L_2 = L_0 \cdot \left( 1 - \frac{\mathbf{s}}{E} + 2 \cdot \frac{\mathbf{s}}{E} \cdot \mathbf{m} \right) \quad (15)$$

Das neue Volumen  $V = L^3$  kann mit Hilfe der Taylorreihe angenähert werden zu:

$$V = L^3 = L_0^3 \cdot \left( 1 - \frac{\mathbf{s}}{E} + 2 \cdot \frac{\mathbf{s}}{E} \cdot \mathbf{m} \right)^3 \approx L_0^3 \cdot \left( 1 - \frac{3 \cdot \mathbf{s}}{E} (1 - 2 \cdot \mathbf{m}) \right) \quad (16)$$

Somit gilt für die relative Volumenänderung:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{3 \cdot \mathbf{s}}{E} \cdot (1 - 2 \cdot \mathbf{m}) \quad (17)$$

Setzt man Gleichung (17) in Gleichung (12) ein, so erhält man für  $\mathbf{s} = \Delta p$ :

$$K = \frac{1}{k} = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mathbf{m})} \quad (18)$$

*Zusammenhang zwischen  $G$  und  $E$ :* Mit Hilfe einer ähnlichen Herleitungen lässt sich auch die folgende Gleichung begründen:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mathbf{m})} \quad (19)$$

Die beiden oben genannten Zusammenhänge sind von elementarer Bedeutung. Durch ihre Verknüpfung könne alle übrigen Beziehungen abgeleitet werden.

### 1.4. Tensorcharakter der elastischen Konstanten

Wirken auf einen Festkörper mehrere Kräfte gleichzeitig in verschiedene Raumrichtungen, so kommt es zu einer Überlagerung von Dehnungen, Stauchungen, Scherungen, Kompressionen und Dilatationen.

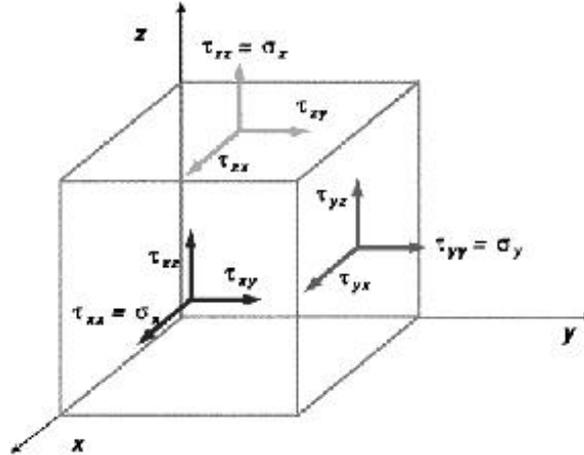


Abbildung 3: Zur Definition des Spannungstensors

Auf jede Oberfläche eines würfelförmigen Probekörpers wirken verschiedene Kräfte, die jeweils in ihre Komponenten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems zerlegt werden können. Auf jede Seite wirken somit zwei orthogonale Scherspannungen und eine Zugspannung. Der erste Index steht jeweils für die Richtung der Flächennormalen, während der zweite die Krafrichtung angibt. Der Spannungszustand des Körpers kann durch den symmetrischen **Spannungstensor**  $\vec{\mathbf{s}}$  beschrieben werden:

$$\vec{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} s_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & s_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Um die Verformung näher beschreiben zu können betrachtet man die relativen Längenänderungen  $e_{ii}$  und die Scherwinkel  $g_{ii}$  und erhält auf diesem Weg den **Verzerrungstensor**  $\vec{\mathbf{e}}$ :

$$\vec{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} e_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & e_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Die allgemeinste Form des Hookeschen Gesetzes kann also wie folgt formuliert werden:

$$\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{C}} \cdot \vec{\mathbf{e}} \quad (22)$$

Die maximal 81 Elemente des Tensors  $\vec{\mathbf{C}}$  heißen *elastische Konstanten* und können mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften des Kristalls auf 3 bis 21 unabhängige Konstanten  $C_{uv}$  reduziert werden. Ist die Elementarzelle kubisch, so bleiben lediglich drei unabhängige Konstanten übrig. Ist der Festkörper zusätzlich isotrop, so bleiben zwei Konstanten, die sogenannten Lamé-Konstanten übrig.

### 1.5. Biegung eines einseitig eingespannten Balkens

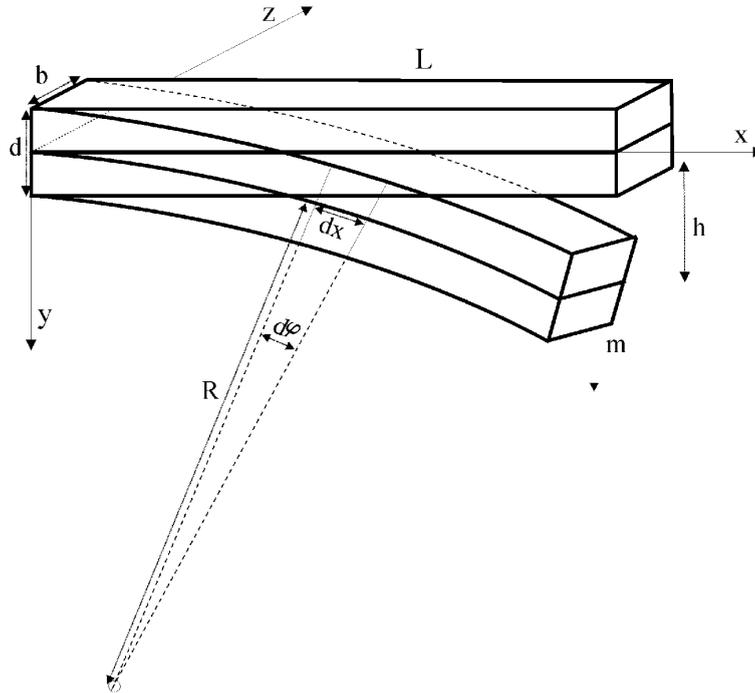


Abbildung 4: Biegung eines Balkens

Die von Bernoulli entwickelte Theorie geht davon aus, dass der Balken überall den gleichen Querschnitt besitzt. Man kann in Gedanken den Balken in eine Anzahl dünner horizontaler Schichten zerlegen, wobei eine Schicht bei der Biegung keine Längenänderung erfährt. Oberhalb dieser neutralen Schicht werden die Schichten gedehnt, darunter gestaucht.

Die relative Längenänderung einer im Abstand  $y$  von der neutralen Faser befindlichen Schicht beträgt:

$$\frac{(R + y) \cdot d\varphi - R \cdot d\varphi}{dx} = y \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{y}{R} \quad (23)$$

Die Kraft die an einem Querschnittselement  $dz \cdot dy$  angreift, ist nach der Definition des Elastizitätsmoduls gegeben durch:

$$dF = \frac{E \cdot y}{R} \cdot dz \cdot dy \quad (24)$$

$$F = \frac{E}{R} \cdot \int y \cdot dz \cdot dy \quad (25)$$

Dies bedeutet, dass die neutrale Faser immer durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht, für den  $\iint y \cdot dz \cdot dy$  verschwindet.

Das Drehmoment der elastischen Kräfte, welches den Querschnitt um eine parallele zur  $z$ -Achse zu drehen versucht, ergibt sich zu:

$$|M| = \int y \cdot dF = \frac{E}{R} \cdot \int y^2 \cdot dz \cdot dy = \frac{E}{R} \cdot I \quad (26)$$

Dabei ist  $I$  das Flächenträgheitsmoment:

$$I = \iint y^2 \cdot dz \cdot dy \quad (27)$$

Mit den Integrationsgrenzen  $z = 0$  bis  $z = b$  und  $y = -\frac{d}{2}$  bis  $y = \frac{d}{2}$  folgt:

$$I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot d^3 \quad (28)$$

Das Drehmoment, welches durch die Masse  $m$  verursacht wird, beträgt:

$$|M'| = m \cdot g \cdot (L - x) \quad (29)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung für die Drehmomente folgt:

$$\frac{E \cdot I}{R} = m \cdot g \cdot (L - x) \quad (30)$$

Für die Krümmung gilt mit

$$\frac{1}{R} = \frac{d\mathbf{j}}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \left( \frac{dy}{dx} \right) \quad (31)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m \cdot g}{E \cdot I} \cdot (L - x) \quad (32)$$

Da für  $x = 0$  sowohl  $y$  als auch  $\frac{dy}{dx}$  Null sind, müssen bei der zweimaligen Integration keine Integrationskonstanten berücksichtigt werden.

$$y(x) = \frac{m \cdot g}{E \cdot I} \cdot \left( \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (33)$$

Für das Elastizitätsmodul am freien Ende gilt  $y(L) = h$ :

$$E = \frac{4}{b} \cdot \left( \frac{L}{d} \right)^3 \cdot \frac{m \cdot g}{h} \quad (34)$$

## 2. VERSUCHSBESCHREIBUNG

### 2.1. Statistisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

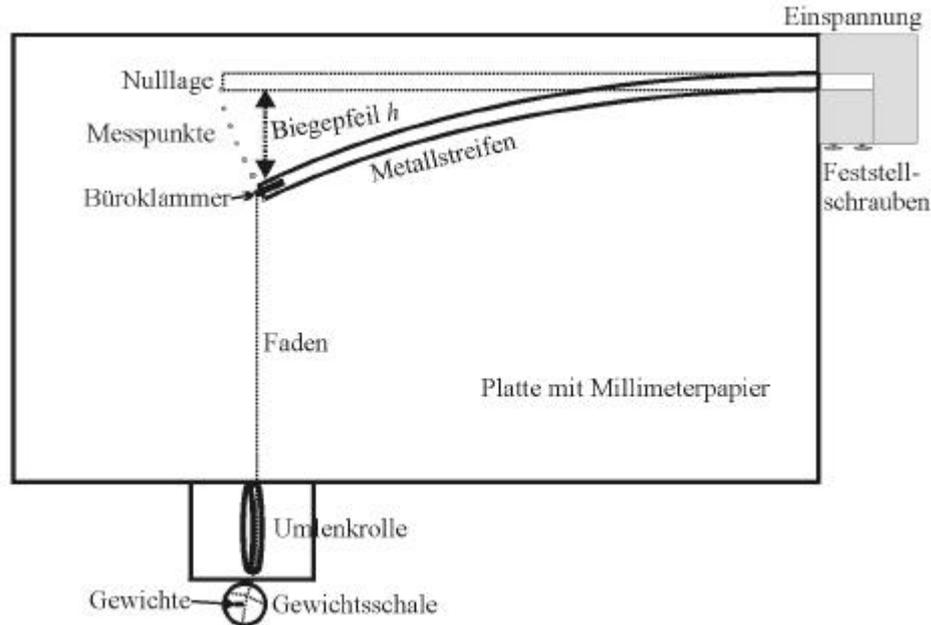


Abbildung 5: Versuchsaufbau statische Methode

Zuerst misst man die Länge  $L$  eines Metallstreifens mit dem Messstab, die Breite  $b$  mit der Schublehre und die Dicke  $d$  mit der Mikrometerschraube. Für den Versuch spannt man dann einen Metallstreifen einseitig in eine Einspannvorrichtung ein. Mit Hilfe einer Gewichtsschale, welche mit verschiedenen Gewichtsstücken beschwert werden kann, wird über eine Umlenkrolle eine Kraft auf den Metallstreifen übertragen. Bei ansteigender Belastung der Gewichtsschale mit Massestückchen, welche zuvor gewogen wurden, wird die Auslenkung  $h$  („Biegepfeil“) des Metallstreifens abgetragen und danach gemessen. Dies wiederholt man mit vier verschiedenen Einspannungen des Metallstreifens. Zu beachten ist, dass bei jeder Einspannung die zugehörige Länge des Streifens neu vermessen wird. Zur Bestimmung des EModuls benutzt man folgende Formel:

$$E_{stat} = \frac{4 \cdot l^3 \cdot F}{b \cdot d^3 \cdot h}, \quad (35)$$

wobei  $l$  die Länge des Balkens ab der Einspannung,  $d$  die Dicke des Balkens,  $b$  die Breite des Balkens,  $h$  die Auslenkung und  $F$  die Gewichtskraft der Gewichtsschale mit den jeweiligen Gewichtsstücken ist.

Beachte: Man befindet sich nur für eine Auslenkung  $h \leq 0,2l$  im Proportionalitätsbereich des Metallstreifens.

## 2.2. Dynamisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

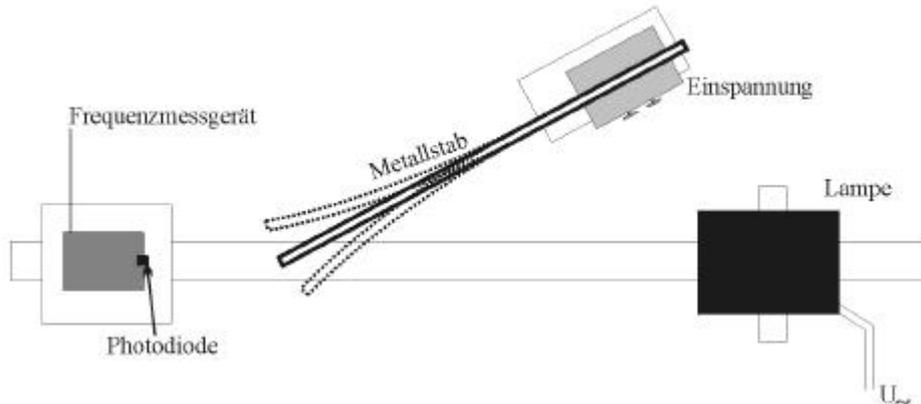


Abbildung 6: Versuchsaufbau dynamische Methode

Derselbe Metallstreifen wie in Versuch 2.1. wird wiederum einseitig eingespannt und durch Auslenkung in harmonische Schwingung versetzt. Durch diese Schwingung wird der Lichteinfall auf die Photodiode periodisch unterbrochen. Mit einem an die Photodiode gekoppeltem Messgerät kann die Periodendauer der Schwingung bestimmt werden. Diese Schwingung gehorcht der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial t^2} = - \frac{E \cdot I}{r \cdot b \cdot d} \frac{\partial^4 \mathbf{m}}{\partial x^4} \quad (36)$$

Das E-Modul lässt sich, aus der Periodendauer  $T$  berechnen:

$$E = \left( \frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot l^2}{1,875^2 \cdot T} \right)^2 \cdot \frac{r \cdot b \cdot d}{I} \quad (37)$$

Die Messungen werden mit verschiedenen Einspannungen durchgeführt.

### 3. VERSUCHSAUSWERTUNG

#### 3.1. Statistisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

##### 3.1.1. Gewichtsbestimmungen mit einer Waage:

Messungenauigkeit  $\Delta m$  der Waage: 0,001 g

Messen der Massen  $m_{\text{Gewichte}}$  der Gewichtstücke in [g]:

1,073	1,083	1,085	1,087	1,087	1,071
1,073	1,076	1,096	1,093	1,082	1,065
1,086	1,081	1,098	1,095	1,086	

Arithmetisches Mittel:  $\bar{m} = 1,083 \text{ g}$   
 Standardabweichung:  $s_{m,\text{Gewichte}} = 9,40 \cdot 10^{-3} \text{ g}$   
 Varianz:  $s_{m,\text{Gewichte}}^2 = 8,83 \cdot 10^{-5} \text{ g}^2$

Masse  $m_{\text{Schale}}$  der Gewichtsschale: 4,030 g  
 Masse  $M_{\text{Al}}$  des Aluminiumstreifens: 7,6 g (Messungenauigkeit 0,1 g)  
 Masse  $M_{\text{Cu}}$  des Kupferstreifens: 26,6 g (Messungenauigkeit 0,1 g)

##### 3.1.2. Bestimmen der Abmessungen des Metallstreifens:

Messen der Länge  $l$  mit einem Messstab in [mm]:

Messungenauigkeit  $\Delta l$  des Messstabes: 0,5 mm

Länge  $l_{\text{Al}}$  des Streifens aus Aluminium: 301,5 mm

Länge  $l_{\text{Cu}}$  des Streifens aus Kupfer: 300,5 mm

Messen der Dicke  $d$  mit einer Mikrometerschraube in [mm]:

Messungenauigkeit  $\Delta d$  der Mikrometerschraube: 0,01 mm

Probe
Messung 1
Messung 2
Messung 3
Messung 4
Messung 5

Aluminium
0,47
0,48
0,49
0,48
0,49

Kupfer
0,50
0,51
0,51
0,50
0,53

Arithmetisches Mittel:  $\bar{d}_{\text{Al}} = 0,48 \text{ mm}$        $\bar{d}_{\text{Cu}} = 0,51 \text{ mm}$   
 Standardabweichung:  $s_{d,\text{Al}} = 8,37 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$        $s_{d,\text{Cu}} = 1,23 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$   
 Varianz:  $s_{d,\text{Al}}^2 = 7,00 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^2$        $s_{d,\text{Cu}}^2 = 1,50 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2$

Messen der Breite  $b$  mit einer Schublehre in [mm]:

Messungenauigkeit  $\Delta b$  der Schublehre: 0,05 mm

Probe	Aluminium	Kupfer
Messung 1	20,00	20,00
Messung 2	20,10	19,95
Messung 3	20,10	19,85
Messung 4	20,00	20,00
Messung 5	20,00	20,00

Arithmetisches Mittel:  $\bar{b}_{Al} = 20,04 \text{ mm}$   $\bar{b}_{Cu} = 19,96 \text{ mm}$   
 Standardabweichung:  $s_{b,Al} = 5,48 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$   $s_{b,Cu} = 6,52 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$   
 Varianz:  $S_{b,Al} = 3,00 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$   $S_{d,Cu} = 4,25 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$

**3.1.3. Elastizitätsmodul des Aluminiumstreifens**

Bezeichnungen:  $F$ : Kraft, welche senkrecht am Streifen angreift.  
 $h_i$ : Biegefeil, bei der jeweiligen Messung  $i$   
 $\bar{h}$ : Mittelwert der Biegefeile  
 $L$ : Einspannlänge des Streifens = 266,5 mm

Formeln: 
$$E = \frac{4}{b} \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^3 \cdot \frac{F}{h}$$

$$F = m \cdot g$$

Größen:  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Messungenauigkeit  $\Delta h$  der Auslenkung: 0,5 mm

$F$ [mN]	$h_1$ [mm]	$h_2$ [mm]	$h_3$ [mm]	$h_4$ [mm]	$\bar{h}$ [mm]	$s_h$ [mm]	$E$ [GPa]	$dE$ [GPa]
39,534	19,5	20,0	20,0	20,0	19,9	0,22	67,11	4,53
50,162	25,0	25,5	25,0	25,0	25,1	0,22	67,36	4,42
60,790	30,0	30,0	30,0	30,0	30,0	0,00	68,36	4,43
71,417	35,0	35,5	35,5	35,0	35,3	0,25	68,35	4,39
82,045	40,0	41,0	41,0	40,5	40,6	0,41	68,14	4,34
92,673	45,0	45,0	46,0	46,0	45,5	0,50	68,72	4,36
103,300	49,5	50,0	51,0	51,0	50,4	0,65	69,18	4,42
113,928	54,5	54,5	56,0	55,0	55,0	0,61	69,88	4,44
124,556	59,0	59,5	61,0	60,5	60,0	0,79	70,04	4,48
135,184	63,5	64,0	66,0	65,5	64,8	1,03	70,44	4,55
145,811	67,5	68,0	70,5	70,5	69,1	1,39	71,17	4,68
156,439	72,5	72,0	74,0	74,5	73,3	1,03	72,05	4,62
167,067	77,0	76,0	77,5	78,5	77,3	0,90	72,96	4,64

Arithmetisches Mittel:	$\bar{E}$	=	$69,53 \cdot 10^9$ Pa
Literaturwert:	$\bar{E}$	=	$71,00 \cdot 10^9$ Pa
Standardabweichung:	$s_E$	=	$1,78 \cdot 10^9$ Pa
Varianz :	$s_E^2$	=	$3,17 \cdot 10^9$ Pa <sup>2</sup>
Gauss – Fehler:	$dE$	=	$4,48 \cdot 10^9$ Pa

$$dE = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l_{Al}}\right)^2 \cdot g_{l,Al}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial m}\right)^2 \cdot g_m^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b_{Al}}\right)^2 \cdot g_{b,Al}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d_{Al}}\right)^2 \cdot g_{d,Al}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial h}\right)^2 \cdot g_h^2}$$

$g$  ist das jeweilige Maximum der Standardabweichung und der Messungenauigkeit.

### 3.1.4. Elastizitätsmodul des Kupferstreifens

Bezeichnungen:	$F$ :	Kraft, welche senkrecht am Streifen angreift.
	$h_i$ :	Biegefeil bei der jeweiligen Messung $i$
	$\bar{h}$ :	Mittelwert der Biegefeile
	$L$ :	Einspannlänge des Streifens = 266,5 mm

Formeln:

$$E = \frac{4}{b} \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^3 \cdot \frac{F}{h}$$

$$F = m \cdot g$$

Größen:	$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
Messungenauigkeit $\Delta h$ :	0,5 mm

$F$ [mN]	$h_1$ [mm]	$h_2$ [mm]	$h_3$ [mm]	$h_4$ [mm]	$h$ [mm]	$s_h$ [mm]	$E$ [Gpa]	$dE$ [Gpa]
39,534	10,5	10,0	10,5	10,5	10,4	0,2	107,13	9,32
50,162	13,5	13,0	13,5	13,0	13,3	0,3	106,44	8,69
60,790	16,0	16,0	16,0	15,5	15,9	0,2	107,66	8,50
71,417	18,5	19,0	19,0	18,5	18,8	0,3	107,09	8,26
82,045	21,0	21,5	21,5	22,0	21,5	0,4	107,29	8,15
92,673	24,0	24,5	24,5	24,5	24,4	0,2	106,89	8,04
103,300	27,0	26,5	27,5	27,5	27,1	0,4	107,07	7,99
113,928	29,5	29,5	30,0	30,0	29,8	0,3	107,66	8,00
124,556	32,5	32,5	32,5	32,5	32,5	0,0	107,75	7,97
135,184	35,0	35,0	35,5	35,5	35,3	0,3	107,82	7,95
145,811	37,5	37,5	37,5	38,0	37,6	0,2	108,95	8,01
156,439	40,0	40,5	40,5	40,5	40,4	0,2	108,93	8,00
167,067	42,5	43,0	43,5	43,5	43,1	0,4	108,91	7,98
177,694	45,0	45,5	45,5	46,0	45,5	0,4	109,80	8,03
188,322	47,5	48,0	48,0	47,5	47,8	0,3	110,88	8,10
198,950	50,0	51,0	50,5	49,5	50,3	0,6	111,31	8,15
209,577	52,5	53,0	53,0	52,0	52,6	0,4	111,96	8,17
220,205	54,5	55,5	56,0	55,5	55,4	0,5	111,80	8,16

Arithmetisches Mittel:	$\bar{E}$	=	$108,63 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
Literaturwert:	$\bar{E}$	=	$123,00 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
Varianz :	$s_E$	=	$3,24 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$
Standardabweichung:	$s_E$	=	$1,80 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
Gauss – Fehler:	$dE$	=	$8,19 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

$$dE = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l_{Cu}}\right)^2 \cdot g_{l,Cu}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial m}\right)^2 \cdot g_m^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b_{Cu}}\right)^2 \cdot g_{b,Cu}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d_{Cu}}\right)^2 \cdot g_{d,Cu}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial h}\right)^2 \cdot g_h^2}$$

$g$  ist das jeweilige Maximum der Standardabweichung und der Messungenauigkeit.

### 3.2. Dynamisches Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

#### 3.2.1. Elastizitätsmodul des Aluminiumstreifens

Bezeichnungen:  $T$ : Periodendauer einer Schwingung  
 $l$ : Einspannlänge des Streifens

Formeln: 
$$E = 48 \cdot \frac{r \cdot p^2 \cdot l^4}{(1,875)^4 \cdot d^2 \cdot T^2}$$

Größen:  $r = 2702 \frac{kg}{m^3}$  (Literaturwert)

Messungenauigkeit  $\Delta T$  der Zeit: 1  $\mu s$   
 Messungenauigkeit  $\Delta l$  der Einspannlänge: 0,5 mm

**Messung 1:** Einspannungslänge  $l = 274,5 \text{ mm}$   
**Messung 2:** Einspannungslänge  $l = 244,5 \text{ mm}$   
**Messung 3:** Einspannungslänge  $l = 203,5 \text{ mm}$

Messung 1		Messung 2		Messung 3	
T [ $\mu s$ ]	E [GPa]	T [ $\mu s$ ]	E [GPa]	T [ $\mu s$ ]	E [GPa]
192278	68,46	151167	69,15	105145	69,15
192163	68,54	150782	69,50	104934	69,43
191645	68,91	150955	69,34	105049	69,28
191837	68,78	150781	69,50	104990	69,36
191726	68,85	150784	69,50	104974	69,38
191567	68,97	150901	69,39	104858	69,53
191502	69,02	150628	69,64	104778	69,64
191452	69,05	150910	69,38	104778	69,64
191273	69,18	150677	69,60	104546	69,95
191187	69,24	150617	69,65	104917	69,45
191093	69,31	150729	69,55	105132	69,17
191055	69,34	150706	69,57	104358	70,20
190937	69,43	150807	69,48	105378	68,85
191001	69,38	150748	69,53	104274	70,31
190776	69,54	150809	69,48	104274	70,31
190588	69,68	150440	69,82	103458	71,43
190579	69,69	150445	69,81	105509	68,68
190910	69,44	151205	69,11	103787	70,97
190456	69,78	150126	70,11	106664	67,20
190409	69,81	150571	69,70	102491	72,78
190736	69,57	149559	70,64		
190318	69,88	150893	69,40		
		150058	70,17		

**Messung 1:**

Arithmetisches Mittel:	$\bar{E}$	=	$69,27 \cdot 10^9$ Pa
Varianz :	$s_E$	=	$0,16 \cdot 10^9$ Pa <sup>2</sup>
Standardabweichung:	$s_E$	=	$0,40 \cdot 10^9$ Pa

**Messung 2:**

Arithmetisches Mittel:	$\bar{E}$	=	$69,61 \cdot 10^9$ Pa
Varianz :	$s_E$	=	$0,11 \cdot 10^9$ Pa <sup>2</sup>
Standardabweichung:	$s_E$	=	$0,34 \cdot 10^9$ Pa

**Messung 3:**

Arithmetisches Mittel:	$\bar{E}$	=	$69,73 \cdot 10^9$ Pa
Varianz :	$s_E$	=	$1,28 \cdot 10^9$ Pa <sup>2</sup>
Standardabweichung:	$s_E$	=	$1,13 \cdot 10^9$ Pa

**Gesamtmessung:**

Arithmetisches Mittel:	$\bar{E}$	=	$69,54 \cdot 10^9$ Pa
Varianz :	$s_E$	=	$0,39 \cdot 10^9$ Pa <sup>2</sup>
Standardabweichung:	$s_E$	=	$0,62 \cdot 10^9$ Pa

Gauss – Fehler:	$dE$	=	$3,01 \cdot 10^9$ Pa
-----------------	------	---	----------------------

$$dE = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l_{Al}}\right)^2 \cdot g_{l,Al}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d_{Al}}\right)^2 \cdot g_{d,Al}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)^2 \cdot g_T^2}$$

$g$  ist das jeweilige Maximum der Standardabweichung und der Messungenauigkeit.

**3.2.2. Elastizitätsmodul des Kupferstreifens**

Bezeichnungen:	$T$ :	Periodendauer einer Schwingung
	$l$ :	Einspannlänge des Streifens

Formeln:

$$E = 48 \cdot \frac{r \cdot p^2 \cdot l^4}{(1,875)^4 \cdot d^2 \cdot T^2}$$

Größen:	$r = 8933 \frac{kg}{m^3}$	(Literaturwert)
---------	---------------------------	-----------------

Messungenauigkeit $\Delta T$ der Zeit:	1 $\mu s$
Messungenauigkeit $\Delta l$ der Einspannlänge:	0,5 mm

**Messung 1:** Einspannungslänge  $l = 206,0$  mm

**Messung 2:** Einspannungslänge  $l = 238,0$  mm

**Messung 3:** Einspannungslänge  $l = 267,0$  mm

Messung 1		Messung 2		Messung 3	
T [ $\mu$ s]	E [GPa]	T [ $\mu$ s]	E [GPa]	T [ $\mu$ s]	E [GPa]
145664	111,73	195576	110,43	245516	110,99
147301	109,26	195212	110,84	245554	110,95
147657	108,73	194969	111,11	245518	110,99
147938	108,32	194624	111,51	245439	111,06
148210	107,92	194754	111,36	244993	111,46
148085	108,10	194436	111,72	245139	111,33
148143	108,02	194598	111,54	245054	111,41
148048	108,16	194675	111,45	244908	111,54
148008	108,22	194382	111,79	244799	111,64
147957	108,29	196330	109,58	244736	111,70
147883	108,40	194427	111,73	244765	111,67
147796	108,53	194266	111,92	244856	111,59
147820	108,49	194273	111,91	244498	111,91
147805	108,51	194095	112,12	244596	111,83
147874	108,41	194174	112,03	244356	112,04
147656	108,73	194337	111,84	244438	111,97
147726	108,63	194280	111,90	244640	111,78
147842	108,46	194278	111,91	244443	111,97
147694	108,68	194378	111,79	244327	112,07
147586	108,84	194266	111,92	244296	112,10
147412	109,09			244517	111,90
147215	109,38			244429	111,98
148056	108,15			244444	111,96
146955	109,77			244436	111,97
				244215	112,17
				244382	112,02

**Messung 1:**

Arithmetisches Mittel:  $\bar{E} = 108,71 \cdot 10^9 \text{ Pa}$   
 Varianz :  $s_E = 0,62 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$   
 Standardabweichung:  $s_E = 0,79 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

**Messung 2:**

Arithmetisches Mittel:  $\bar{E} = 111,52 \cdot 10^9 \text{ Pa}$   
 Varianz :  $s_E = 0,39 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$   
 Standardabweichung:  $s_E = 0,62 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

**Messung 3:**

Arithmetisches Mittel:  $\bar{E} = 111,70 \cdot 10^9 \text{ Pa}$   
 Varianz :  $s_E = 0,14 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$   
 Standardabweichung:  $s_E = 0,38 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

**Gesamtmessung:**

Arithmetisches Mittel:  $\bar{E} = 110,64 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

Varianz :  $s_E = 0,38 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$

Standardabweichung:  $s_E = 0,59 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

Gauss – Fehler:  $dE = 5,38 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

$$dE = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l_{Cu}}\right)^2 \cdot g_{l,Cu}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d_{Cu}}\right)^2 \cdot g_{d,Cu}^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)^2 \cdot g_T^2}$$

$g$  ist das jeweilige Maximum der Standardabweichung und der Messungenauigkeit.

### 3.3. Diagramme

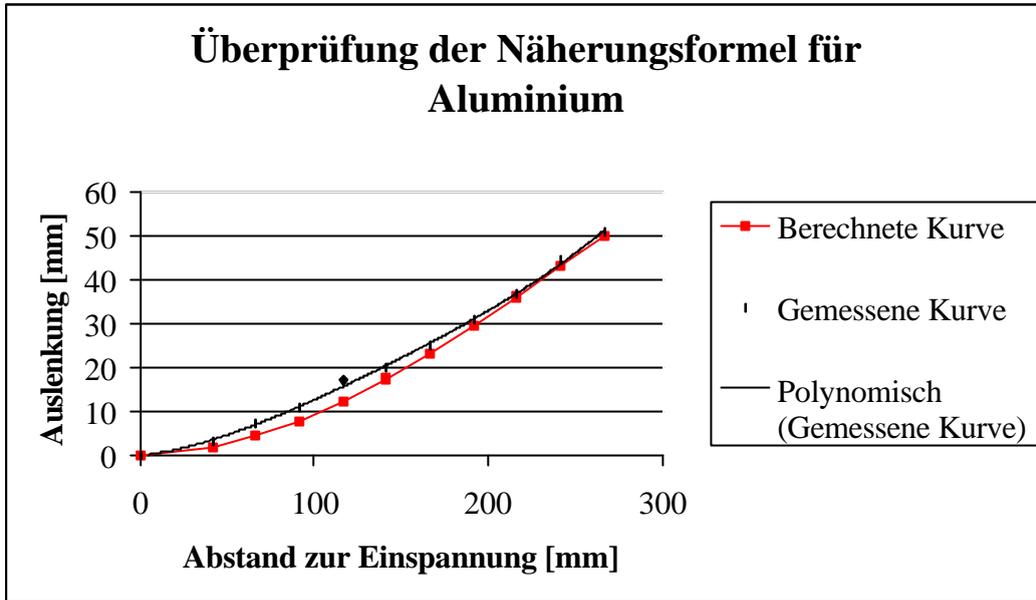


Abbildung 7: Biegung eines Aluminiumstabes

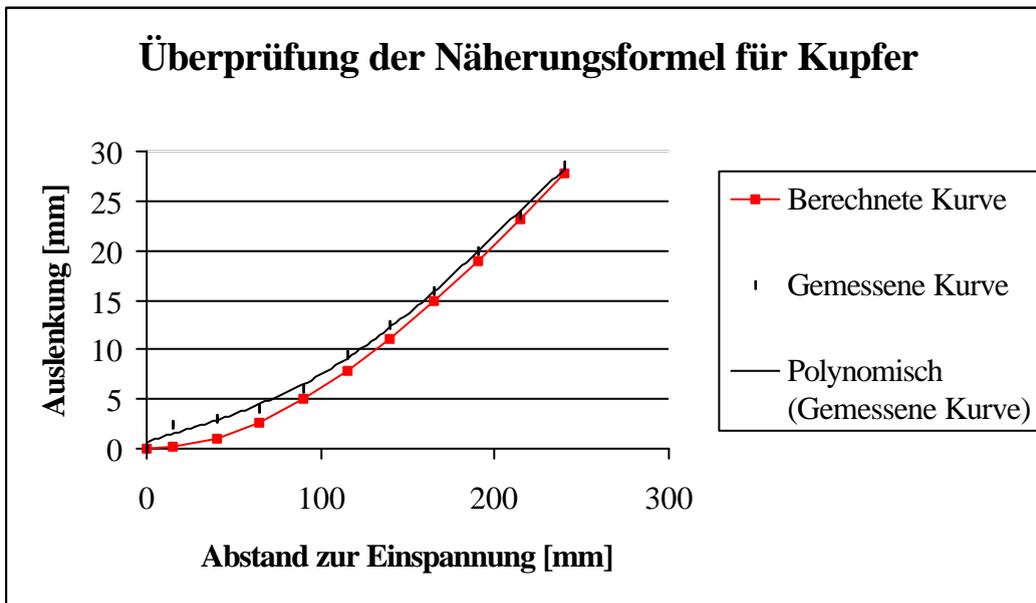


Abbildung 8 : Biegung eines Kupferstabes

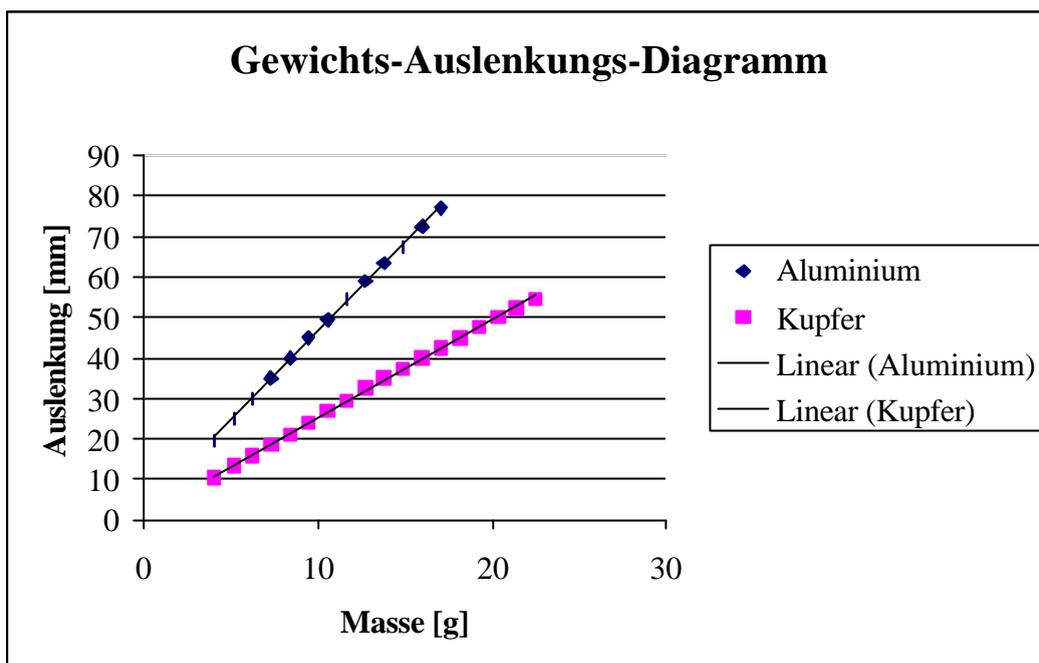


Abbildung 9: Abhängigkeit von Masse und Auslenkung

## 4. FEHLERDISKUSSION

Das Elastizitätsmodul, das mit der statischen Methode ermittelt wurde, stimmt mit erstaunlicher Genauigkeit mit dem Elastizitätsmodul überein, welches mit dem dynamischen Verfahren festgestellt wurde. Dies ist sowohl in der Messung mit Aluminium, als auch in der Messung mit Kupfer bestätigt worden. Es ist also nicht davon auszugehen, dass größere systematische Fehler in der Versuchsdurchführung gemacht worden sind.

Die Schwankungen der Messreihen bei der statischen Methode bedarf jedoch einer kurzen Betrachtung. Eine recht große Ungenauigkeit liefert die Mittelung der Massestückchen bei der statischen Methode. Um das Verfahren zu optimieren, hätte man die Massestücke jeweils mit ihren Gewicht kennzeichnen müssen, um eine genauere Auswertung zu erreichen.

Eine mögliche Fehlerquelle wäre außerdem, dass bei der Versuchsdurchführung die Kraft möglicherweise nicht vollständig senkrecht an dem Metallstreifen wirkte. Für die Biegung wäre in diesem Fall nur eine kleinere Kraftkomponente als gewollt zuständig.

Bei der dynamischen Methode sind aufgrund der Konstanz der Messwerte systematische Fehler nahezu ausgeschlossen. Zu Berücksichtigen wäre lediglich, dass bei der Biegeschwingung natürlich eine gewisse Dämpfung durch den Luftwiderstand gegeben ist. Man kann dies auch an Hand der Messreihen beobachten. Die Schwingungsdauer des Streifens wird mit steigender Messung stets kleiner, was zu einer ständigen Erhöhung des Elastizitätsmoduls führt.

Zu beachten ist außerdem, dass die Abmessungen des Metallstreifens recht stark über die Probe hinweg schwankten. Da bei der Berechnung des Elastizitätsmoduls bei beiden Meßmethoden einige Größen mitunter sogar in der dritten Potenz in die Gleichung eingehen, ist es erstrebenswert eine möglichst ideale Probe bei der Messung zu verwenden.

Das für Aluminium ermittelte Elastizitätsmodul stimmt mit sehr großer Genauigkeit mit dem Literaturwert überein. Beim Kupfer gab es jedoch eine größere Abweichung von diesem. Dieser Unterschied ist möglicherweise auf das Alter und auf Verformungen des Metalls, welche schon beim Versuchsbeginn bestanden, zurückzuführen. Außerdem ist es möglich, dass es sich nicht um ein absolutes Reinmetall handelt, sondern dass sich kleinste Verunreinigungen eingeschlichen haben, welche die Eigenschaften des Kupfers derart verändern. Außerdem sind die Eigenschaften durch Oxidation mit Sicherheit nicht mehr so wie im Reinmetall.

Die Kurve der Balkenbiegung stimmt für Kupfer und Aluminium für die höheren Werte recht genau mit den berechneten Werten überein. Im Anfangsbereich treten jedoch recht starke Abweichungen von der Idealkurve auf. Zu Begründen ist dies mit der Tatsache, dass beide Metallstreifen schon vor Versuchsbeginn recht stark verbogen waren, und somit nicht mit der idealen Nullstellung übereinstimmten. Außerdem wurde die Kurve erst nach dem Anhängen der Maximalkraft mit weniger Gewichten gezeichnet. Wahrscheinlich wurden die Metallstreifen durch die Maximalkraft ein wenig plastisch verformt, was dazu führte, dass die Streifen nicht mehr ganz genau auf den Ausgangswert zurückkehrten.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Bergmann – Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik Band 1 Mechanik, Relativität, Wärme.*  
Walter de Gruyter, 1998
- [2] Bergmann – Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik Band 4 Aufbau der Materie.*  
Walter de Gruyter, 1981
- [3] Bausch • Bohm • Kleber: *Einführung in die Kristallographie.*  
Verlag Technik GmbH Berlin, 1990
- [4] Christian Gerthsen: *Physik.*  
Springer Verlag, 1999
- [5] W. Walcher: *Praktikum der Physik.*  
Teubner Studienbücher, 1989
- [6] George Joos: *Lehrbuch der theoretischen Mechanik.*  
AULA – Verlag, 1989
- [7] Paul A. Tipler: *Physik.*  
Spektrum Akademischer Verlag, 1998
- [8] Richard Knoerr: *Knaurs Lexikon der Physik.*  
Droemersch Verlagsanstalt, 1988
- [9] Hans Breuer: *dtv – Atlas zur Physik.*  
Deutscher Taschenbuch Verlag, 1994
- [10] Horst Stöcker: *Taschenbuch der Physik.*  
Harri Deutsch Verlags AG, 1997