# Versuch Nr. 6
# Der G-Modul von kristallinen Festkörpern (Metallen)

Michael Buser Anita Lamprecht

9. November 2000

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Aufbau der Festkörper

Beim Festkörper ist die mittlere kinetische Energie seiner Bestandteile kleiner als ihre Bindungsenergie. Die Moleküle sind in festen Positionen angeordnet, sie können lediglich um ihre Mittellage schwingen oder rotieren. Ein Festkörper besteht also aus räumlich periodisch angeordneten Grundbausteinen, die durchaus punkt- oder linienförmige Fehlstellen aufweisen dürfen. Er besitzt eine Kristallstruktur. Unter idealen Festkörpern versteht man Körper mit einer streng regelmäßigen Anordnung der Atome, Moleküle und Ionen. Reale Festkörper weisen dagegen durchaus Fehler im Kristallgitter auf. Kristalle sind ideale Festkörper, deren Bestandteile an Gleichgewichtslagen gebunden sind, die sich im allgemeinen in geometrisch-periodischer Folge wiederholen, d.h. die Bestandteile bilden feste Raumgitter. In der Regel sind die Eigenschaften der Kristalle anisotrop, d.h. sie hängen von der Richtung (bezogen auf das Kristallgitter) ab.

Einkristalle zeigen parallel ausgerichtete Basisstrukturen, aber auch Fehlstellen im Gitter. Sie können sowohl aus reinen Substanzen als auch aus Legierungen oder gezielt verunreinigten Stoffen bestehen, ihre äußere Form spielt keine Rolle. Im Gegensatz zu den Polykristallen hängen die Eigenschaften der Einkristalle meist von der Orientierungsrichtung des Einkristalls ab. Polykristalle bestehen aus Kernzellen, die jeweils eine bestimmte kristalline Struktur besitzen. Diese Struktur beschränkt sich im allgemienen auf eine solche Kernzelle, so dass die einzelnen Kristallstrukturen statistisch über mehrere Kernzellen gemittelt in alle Raumrichtungen orientiert sind. Aufgrund dieser statistischen Orientierung in alle Raumrichtungen sind Polykristalle isotrope Substanzen, d.h. ihre Eigenschaften sind in allen Raumrichtungen gleich und auch ihre Verformungen sind isotrop.

Diese Richtungsabhängigkeit der physikalischen Eigenschaften trifft auch auf Gläser zu. Gläser sind hochviskose Schmelzen, die sehr langsam in den festen Zustand übergehen (entglasen). Sie entstehen aus dem flüssigen Zustand durch rasches Abkühlen.

Ein ebenfalls isotroper Stoff sind amorphe Substanzen. Sie bestehen aus mikrokristallinen Bruchstückstrukturen, sind instabil gegen den Übergang in den kristallinen Zustand und bilden einen Zustand zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten.

## 1.2 Fehlstellen, Kristallbaufehler, Versetzungen

Fehlstellen können wie bereits erwähnt punkt- oder linienförmig ausgebildet sein. Unter punktförmigen Fehlstellen versteht man unter anderem Leerstellen, d.h. unbesetzte Plätze im Kristallgitter und Zwischengitterplätze, die durch zusätzliche Teilchen besetzt werden können. Diese Arten von Fehlstellungen können durch den Kristall wandern und innerhalb einer Relaxationszeit wieder verschwinden. Bei rascher Abkühlung bleiben Fehlstellen häufig erhalten. Weitere Fehlstellen sind Fremdteilchen, die normale Gitterplätze einnehmen oder sich zwischen Gitterpositionen schieben können. Zudem sind auch Schrauben- oder Stufenversetzungen möglich. Sie ändern das elastische Verhalten des Kristallgefüges, so dass einzelnen Schichten ungehinderter aufeinander gleiten können.

## 1.3 Elastizität und Anelastitzität

Die Eigenschaft der Festkörper, unter dem Einfluß von Kräften ihre Form und ihr Volumen reversibel, also nur vorübergehend, zu ändern und zwar nur so lange, wie die äußeren Kräfte wirksam sind, bezeichnet man als Elastizität. Elastisches Verhalten im engeren Sinn beschreibt die Erscheinung, dass die Volumen- und Formänderung momentan[1] erfolgt, sobald die Kräfte angelegt bzw. entfernt werden. Erfolgt die Volumen- oder Formänderung nicht momentan, so spricht man von anelastischem Verhalten oder von elastischer Nachwirkung. Somit beschreibt der Begriff Anelastizität den Vorgang, dass eine Verformung nicht momentan, sondern erst nach einer gewissen Zeit wieder verschwindet. Dies beruht auf mikroskopischen Prozessen, bei denen Atome ihre Plätze tauschen. Anelastisches Verhalten ist immer mit Energieverlusten verbunden, da hierbei Atome des Körpers zu Schwingungen angeregt werden, die seine thermische Energie erhöhen.

## 1.4 Plastizität

Oft kehrt ein Festkörper nicht mehr in seinen Ausgangszustand zurück, wenn die Kraftwirkung aufhört, so dass Volumen- oder Formänderungen zurückbleiben, die nicht mehr verschwinden. Solche bleibenden Phänomene werden als plastische Verformung oder Plastizität bezeichnet. Eine solche Verformung tritt ein, wenn die Elastizitätsgrenze eines Materials überschritten

[1] so schnell wie eine Schallwelle den Körper durchqueren kann

wird. Zunächst dehnt sich das Material stärker als im elastischen Bereich, bis es schließlich reißt. Jede dieser Verformungen oberhalb der Elastizitätsgrenze ist irreversibel. Bei einer plastischen Verformung eines Körpers verlagert sich ein großer Teil seiner Atome irreversibel an andere Stellen.

## 1.5 Spanungs-Dehnungs-Kurve

Wird ein Draht gedehnt, so hängt die beoachtete Dehnung $\Delta l$ sowohl von der Anfangslänge $l_0$ des Drahtes als auch von seinem Querschnitt ab. Um eine Meßkurve zu bekommen, die nur durch Art und Struktur des Materials bestimmt ist verwendet man reduzierte Einheiten. Die relative Dehnung wird mit $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$[2] bezeichnet, die (mechanische) Spannung[3] mit $\sigma = \frac{F}{A}$, wobei $F$ die auf den dazu senkrechten Querschnitt $A$ der Probe wirksame Kraft ist. Dabei wird angenommen, dass die Kraft gleichmäßig über die Fläche $A$ verteilt ist. Mit diesen reduzierten Größen ($\epsilon$ und $\sigma$) lassen sich nun Meßkurven darstellen, die unabhängig von der Form der Probe sind, sie werden **Spannungs-Dehnungs-Kurven** genannt. Obwohl die Kraft bzw. die Spannung die unabhängige und die Dehnung die abhängige Variablen sind, ist es üblich die Spannung auf der Ordinate und die Dehnung auf der Abszisse einer Spannungs-Dehnung-Kurve aufzutragen. Aufgrund der Irreversibilität der plastischen Verfomung kann nur der Elastizitätsbereich, d.h. der Bereich bis zur Proportionalitätsgrenze $\sigma_0$, reversibel sein. Bei einer Spannungs-Dehnungs-Kurve folgt auf den Elastizitätsbereich der Leichtgleitbereich, darauf der Verfestigungsbereich und schließlich kurz vor der Zerreißgrenze der sogenannte Fließbereich.

## 1.6 Elastische Module

Die elastischen Module charakterisieren allgemein die Verformbarkeit einer Substanz, genauer gesagt den Widerstand, welchen der Körper einer verformenden Kraft bzw. Spannung entgegensetzt. Sie sind nicht konstant, sondern hängen vielmehr von Temperatur, Druck und vom elektomagnetischen Feld usw. ab. Der Elastizitätsmodul, der die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve im Elastizitätsbereich entspricht, bezeichnet man mit $E = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$ bzw. bei linearem Verlauf $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$. "Harte" Stoffe besitzen also einen großen Elastizitätmodul, "weiche" einen kleinen.

[2] $\epsilon$ ist eine dimensionslose Einheit
[3] Dimension $ML^{-1}T^{-2}$ und die SI-Einheit $N/m^2$

Wird ein Draht gedehnt, so vergrößert sich nicht nur seinen Länge, sondern es kommt auch zu einer Verkleinerung des Querschnitts, einer sogenannte Querkontraktion und außerdem zu einer Zunahme des Volumens des Drahtes. Das Verhältnis der relativen Radiusänderung $\epsilon_\perp = -\frac{\Delta d}{d_0}$ zur relativen Längenänderung $\epsilon_\parallel = \frac{\Delta l}{l_0}$ wird als Poissonzahl $\mu$ bezeichnet. Wobei sich $\parallel$ bzw. $\perp$ auf die Richtung der wirksamen Kraft beziehen. Es gilt also:

$$\mu = \frac{\epsilon_\perp}{\epsilon_\parallel} = \frac{\Delta d/d_0}{\Delta l/l_0} \tag{1}$$

Da $\Delta d$ die Änderung der Drahtdicke radial nach innen gerichtet ist, wird sie negativ gerechnet, woraufhin $\mu$ eine positive Größe mit Dimension Eins darstellt. Die relative Volumenänderung $\Delta V/V_0$ ergibt sich durch:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= (d_0 + \Delta d)^2 (l_0 + \Delta l) - d_0^2 l_0 && (2)\\
&= \Delta V + V_0 - V_0 && (3)\\
&= d_0^2 \Delta l + 2 d_0 l_0 \Delta d + 2 d_0 \Delta d \Delta l + \Delta d^2 l_0 + \Delta d^2 \Delta && (4)
\end{aligned}$$

Da bereits $\Delta l$ und $\Delta d$ sehr klein sind gegenüber $l_0$ und $d_0$, können die quadratischen Terme $\Delta d \Delta l$, $\Delta d^2$, $\Delta d^2 \Delta l$ vernachlässigt werden. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{V_0} &= \frac{d_0^2 \Delta l + 2 d_0 l_0 \Delta d}{d_0^2 l_0} && (5)\\
&= \frac{\Delta l}{l_0} + 2\frac{\Delta d}{d_0} && (6)\\
&= \epsilon_\parallel + 2\epsilon_\perp = \epsilon_\parallel - 2\epsilon_\parallel \mu && (7)\\
&= \epsilon_\parallel (1 - 2\mu) && (8)\\
& && (9)
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass sich das Volumen nur vergrößern ($\mu < 0,5$) oder gleich bleiben kann ($\mu = 0,5$). Bei allseitigem Druck $p$ wird die relative Volumenänderung $\Delta V/V_0$ durch den Kompressionsmodul $K = -V_0 \frac{dp}{dV}$ bzw. die sogenannte Kompressibilität $\kappa = \frac{1}{K}$ beschrieben.

Betrachten wir nun die Volumenänderung bei hydrostatischem[4] Druck. Dabei setzen wir zu Vereinfachung der Betrachtung den Druck aus sechs paarweise einander entgegengerichteten Kräften entlang der Koordinatenachsen

[4] auf allen Seiten eines Körpers wirkt der gleiche Druck

zusammen. Wird ein Würfel der Kantenlänge $l_0$ zunächst einer uniaxialer Druckbelastung durch eine Kraft $F = -\sigma l_0^2$ ausgesetzt, so verkürzt er sich dabei in Druckrichtung um $\Delta l = l_0 \frac{\sigma}{E}$ und verlängert sich in den beiden senkrecht dazu stehenden Richtungen um $\mu \Delta l$. Zur Vereinfachung werden nun alle ünbeteiligtenFlächen festgehalten, so dass die Verformung jeweils nur in einer Richtung erfolgt. Aus einem Würfel vom Volumen $V_0 = l_0^3$ wird bei diesem Vorgang ein Prisma mit dem Volumen

$$V = (l_0 + \mu \Delta l)^2 (l_0 - \Delta l) = l_0^3 (1 + \mu \frac{\sigma}{E})^2 (1 - \frac{\sigma}{E})$$

Beim Ausmultiplizieren können die zweite und höhere Potenzen von $\frac{\sigma}{E}$ bzw. $\mu \frac{\sigma}{E}$ vernachlässigt werden, da diese proportional zu $\Delta l / l_0$ und klein gegen 1 sind. Somit ergibt sich $V = l_0^3 (1 + \frac{\sigma}{E}(2\mu - 1))$. Für die relative Volumenänderung erhält man somit:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V - l_0^3}{l_0^3} = \frac{\sigma}{E}(2\mu - 1)$$

Wird der Würfel nun auch in die beiden anderen Richtungen senkrecht dazu durch je eine gleichgroße Kraft $F$ zusammengedrückt und sei der Würfel so fixiert, dass er sich nicht unter dem Einfluß der Kräfte als Ganzes verscheibt, so verändert sich sein Volumen in erster Näherung noch zweimal um denselben Betrag wie oben. Insgesamt ändert sich also das Volumen des Würfels um:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3 \frac{\sigma}{E}(2\mu - 1) \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

Diese drei gleichgroßen Kräfte, senkrecht auf drei zueinander orthogonalen Würfelflächen entsprechen einem allseitigen Druck der Größe $p = \frac{F}{l_0^3}$. Da der Würfel fixiert sein sollte, wirken auf ihn zu $F$ entgegengesetzte Reaktionskräfte von den Stützflächen. Damit kann dieses Ergebnis für $\Delta V / V_0$ mit dem Kompressionsmodul $K = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V}$ verglichen werden:

$$K = -\Delta p \frac{V_0}{\Delta V} = -\frac{F}{l_0^3} \frac{E}{3\sigma(2\mu - 1)}$$

bzw. mit $\sigma = \frac{F}{l_0^2}$

$$K = -\frac{E}{3(2\mu - 1)} = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

Somit folgt für $\kappa$:

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

Hiermit ist gezeigt, dass sich für isotrope Körper der Kompressionsmodul $K$ bzw. die Kompressibilitaet $\kappa$ durch $E$ und $\mu$ ausdrücken läßt. Diesen Beweis kann man für beliebig geformte Körper führen. Da jeder Stoff bei allseitigem Druck sein Volumen verkleinert, müssen $K$ und $\kappa$ gemäß ihrer Definition positiv sein. Der Schubmodul spielt bei Scherung und Torsion von Festkörpern eine Rolle und ist definiert als das Verhältnis der wirksamen Spannung zum Winkel $\gamma$ um den die Seitenkante eines Würfels daduch gekippt wird:

$$G = \frac{F_{\parallel}}{A\gamma} = \frac{\tau}{\gamma} \tag{14}$$

Der Boden des betrachteten Würfels wird festgehalten und an seiner Deckfläche $A$ wirkt eine zur Bodenfläche parallele Kraft $F_{\parallel}$. Diesen Vorgang nennt man Scherung, weshalb der Schubmodul auch oft als Schermodul bezeichnet wird. 14 gilt nur für sehr kleine Winkel $\gamma \leq 10^{-3} rad$, denn dann kann $\tan\gamma = \frac{\Delta a}{a}$ durch $\gamma$ ersetzt werden.

$F_{\parallel}$, eine Kraft, die parallel zu einer Fläche $A$ angreift bezeichnet man als Tangential-, Scher- oder Schubkraft. $\tau = \frac{F_{\parallel}}{A}$ wird als Tangential-, Scher oder Schubspannung bezeichnet im Gegensatz zu $\sigma = \frac{F_{\perp}}{A}$, einer Normal-, Zug- oder Druckspannung.

# 2 Versuchsbeschreibung

## 2.1 Bestimmung des G-Moduls durch Verdrillen von Drähten

### 2.1.1 Statische Methode

Ein dünner Rundstab von der Länge $l$ und vom Radius $R_0$, der am oberen Ende fest eingespannt ist, trägt an seinem unteren, freien Ende eine horizontale

Scheibe vom Radius R. An zwei gegenüberliegenden Punkten dieser Scheibe sind Schnüre angebracht, die über Rollen gelegt sind. An den Schnurenden befinden sich Schalen zum Auflegen von Massestücken. Auf jede Schale werden Massenstücke der Masse $m$ mit der Gewichtskraft $G = mg$ aufgelegt. Somit wirkt auf den Stab das Drehmoment $M = Fl = 2GR = 2Rmg$. Unter der Einwirkung von $M$ dreht sich die Scheibe um den Winkel $\varphi$, der mit Hilfe eines an der Scheibe fest fixierten Zeigers gemessen werden kann. Wird der Zeiger um die Strecke $a$ ausgelenkt, so kann $a$ auf einer parallen, zum Scheibenrand und senkrecht zum Zeiger fixierten Skala abgelesen werden. Der Winkel $\varphi$, um den die Scheibe ausgelenkt wurde, berechnet sich mit dem Radius $r$ (Abstand Scheibenmittelpunkt – Skala) wie folgt:

$$\varphi = \frac{a}{r} \tag{15}$$

Da dieser Versuch auf die Verdrillung eines Stabes basiert, kann der Verdrillungswinkel $\varphi$ auch auf eine andere Weise berechnet werden . Betrachten wir zunächst anstelle eines kompakten zylindrischen Stabes einen sehr dünnen Hohlzylinder der Länge $l$ mit dem Radius $\tilde{r}$ und der Wandstärke $d\tilde{r}$. Der Hohlzylinder sei am oberen Rand festgehalten, am unteren greife das kleine tangentiale Kräftepaar $dF$ an, wodurch der Rand des Hohlzylinders um den Winkel $\varphi$ verdreht wird. Der Neigungswinkel einer Mantellinie ist nun näherungsweise $\gamma = \frac{\tilde{r}\varphi}{l}$ ($\tan\gamma \approx \gamma$). Betrachtet man nun den Hohlzylinder längs der Achse aufgeschnitten, so erhält man die Mantelfläche als Ebene, welche einem Prisma der Dicke $d\tilde{r}$ entspricht, das durch die Kraft $dF$ einer Scherung um $\gamma$ ausgesetzt ist. Daher gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \tau &= \gamma G \\ \gamma &= \frac{\tilde{r}\varphi}{l} = \frac{\tau}{G} \\ \tau &= \frac{dF}{dA} \\ dA &= 2\pi\tilde{r}d\tilde{r} \end{aligned}$$

Die Gleichungen ineinander eingesetzt ergibt:

$$\varphi = \frac{ldF}{2\pi\tilde{r}^2 d\tilde{r}G}$$

Ersetzt man noch $dF$ durch das Drehmoment $dM = \tilde{r}dF$ und integriert gleichzeitig über den Radius bzw. das Drehmoment, folgt:

$$\int_0^M dM = \int_0^{R_D} \frac{2\pi G\varphi}{l}\tilde{r}^3 d\tilde{r}$$

ausintegriert erhält man die Gleichung für die Torsion:

$$\varphi = \frac{2l}{\pi G R_D^4} M \Rightarrow G = \frac{4lmgR}{\pi R_D^4 \varphi} \quad (16)$$

Der Radius $R_D$ des Drahtes wird mit einer Mikrometerschraube gemessen. Diese Messung muß sehr genau sein, da der Fehler von $R_D$ mit dem vierfachen Gewicht in den relativen Fehler von $G$ eingeht. $R$ wird mit einer Schieblehre, $l$ mit einem Maßstab mit Millimetereinteilung gemessen.

### 2.1.2 Dynamische Methode

An einem Draht der Länge $l$ und dem Durchmesser $2R_D$ hängt ein rotationssymmetrischer, scheibenförmiger Körper $K$ derart, dass er sich um seine Figurenachse drehen kann und dass diese Achse zugleich die Achse des Drahtes ist. Wird $K$ um den Winkel $\varphi$ aus seiner Ruhelage verdreht, so übt der Draht auf $K$ ein rücktreibendes Drehmoment aus, daß nach 16 proportional zur Auslenkung ist. Die Proportionalitätskonstante wird als Richtmoment $D$ bezeichnet. Für sie gilt:

$$M = -\frac{\pi}{2}\frac{R_D^4}{l} G\varphi = -D\varphi \quad (17)$$

Läßt man nun $K$ in dieser verdrillten Stellung los, so erfährt er nach Newton die (Dreh-)Beschleunigung

$$\ddot{\varphi} = \frac{M}{I} \quad (18)$$

Aus (17) und (18) folgt somit $M = -D\varphi = I\ddot{\varphi}$ und daraus ergibt sich die Differenzialgleichung bzw. die Schwingungsgleichung, die die Bewegung dieses Systems beschreibt:

$$I\ddot{\varphi} + D\varphi = 0 \quad (19)$$

oder $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$ mit $\omega^2 = \frac{D}{I}$
Hiernach führt der Körper eine Drehschwingung mit der Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$ aus. Mißt man diese, so gilt unter der Voraussetzung, dass $I$ bekannt, ist für den Schubmodul die Gleichung:

$$G = \frac{2}{\pi}\frac{l}{R_D^4}D = \frac{8\pi l I}{R_D^4 T^2} \tag{20}$$

wobei $I$ das Trägheitsmoment des Körpers $K$ um seine Dreh- bzw. Figurenachse darstellt. $K$ hat jedoch aufgrund der Ansatzstücke keine einfache geometrische Form und somit ist $I$ schwer zu berechnen. Daher wird zunächst die Schwingungsdauer $T$ von $K$ gemessen, dann wird das Trägheitsmoment, durch das getrennte Auflegen von 5 unterschiedlichen Kreisringen mit der Masse $m_k$, dem Innenradius $r_{i_k}$ und dem Außenradius $r_{a_k}$, um das leicht zu berechnende Trägheitsmoment $I_{R_k}$ des jeweiligen Kreisrings vergrößert und erneut die Schwingungsdauer $T_{R_k}$ gemessen. Dann folgt aus Gleichung (2.1.2):

$$T_{R_k} = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_{R_k}}{D}} \tag{21}$$

Durch Quadrieren von (19) und (21) und durch Subtraktion folgt die Gleichung

$$T_{R_k}{}^2 - T^2 = 4\pi^2 \frac{I_{R_k}}{D}$$

und damit

$$D = 4\pi^2 \frac{I_{R_k}}{T_{R_k}{}^2 - T^2}$$

in der ausschließlich $I_{R_k}$, das Trägheitsmoment des Kreisrings vorkommt, das man nach der Gleichung $I_{R_k} = \frac{1}{2} m_{s_k}(r_{i_k}^2 + r_{a_k}^2)$ berechnet. Setzt man nun die Gleichung für $D$ in Gleichung (20) ein, folgt:

$$G = 8\pi \frac{l}{R_D^4}\frac{I_{R_k}}{(T_{R_k}^2 - T^2)} \tag{22}$$

Zur Bestimmung von $G$ sind also $T$ und $T_{R_k}$ möglichst sicher zu ermitteln. Die Radien $r_{i_k}$ und $r_{a_k}$ mißt man mit der Schieblehre, $R_D$ mit der Mikrometerschraube und $l$ mit einem Maßstab mit Millimeterteilung.

# 3 Versuchsauswertung

## 3.1 Statische Methode

Gemessene Werte:

$$\begin{aligned}
l &= 0,912m \\
\Delta l &= 0,5mm \\
R &= 0,08m \\
\Delta R &= 0,5mm \\
R_D &= 0,0008m \\
\Delta R_D &= 0,0025mm \\
r &= 0,15m \\
r &= 0,5mm \\
\Delta a &= 5mm
\end{aligned}$$

Aus der Gl. 16 folgt durch Umstellen:

$$m = \frac{\pi R_D^4}{4lgR} G\varphi$$

Bezeichnet man $s$ als Steigung im $m - \varphi-$Diagramm, so erhält man:

$$s = \frac{\pi R_D^4}{4lgR} G \Rightarrow G = s\frac{4lgR}{\pi R_D^4}$$

Durch lineare Regression ($\rightarrow$ Anhang) erhält man:

$$\begin{aligned}
s &= 0,03549\frac{kg}{rad} \quad \Delta s = 0,004693\frac{kg}{rad} \\
\Rightarrow G &= 78,96GPa
\end{aligned}$$

Für den Größtfehler ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta G &= \left|\frac{\partial G}{\partial s}\Delta s\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial l}\Delta l\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial R}\Delta R\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial R_D}\Delta R_D\right| \\
&= 11,96GPa
\end{aligned}$$

## 3.2 Dynamische Methode

Aus Gl. 22 ergibt sich durch Umstellen:

$$(T_K^2 - T^2) \quad = \quad \frac{8\pi l}{GR_D^4} I_K \quad \Rightarrow \quad \text{Steigung} \quad s = \frac{8\pi l}{GR_D^4}$$

Den Wert der Steigung $s$ und $\Delta s$ erhält man wieder durch lineare Regression (→ Anhang).

$$\begin{aligned}
s &= 852,5 \frac{s^2}{kgm} \\
\Delta s &= 67,5 \frac{s^2}{kgm}
\end{aligned}$$

weitere gemessene Werte

$$\begin{aligned}
l &= 1,001m \\
\Delta l &= 0,5mm \\
R_D &= 0,001261m \\
\Delta R_D &= 0,5mm \\
G &= 186,74GPa \\
\Delta G &= \left|\frac{\partial G}{\partial s}\Delta s\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial l}\Delta l\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial R_D}\Delta R_D\right| \\
&= 17,84GPa
\end{aligned}$$

# 4 Fehlerdiskussion

Im allgemeinen ergibt sich bei der statischen Methode das Problem, dass die Nulllage durch die einseitge Belastung nicht exakt bestimmt ist und so die gemessenen Winkel $\varphi$ fehlerträchtig sind. Eine Verbesserung der statischen Methode würden Messungen in beiden Drehrichtungen bewirken. Die dynamische Methode ist wesentlich exakter, da sich hier das Problem der Bestimmung der Nullage nicht ergibt.

Ein grosses Problem, dass bei unseren Messungen auftrat war,dass der Draht verbogen war und keinen gleichmässigen Querschnitt besass. Eine weitere Fehlerquelle bestand darin, dass die obere Arretierung des Drahtes beweglich war und sich so bei den Versuchen, vor allem bei der dynamischen Methode, z.T. merklich mitbewegte. Dadurch beschränkte sich die Schwingung bei der dynamischen Methode nicht nur auf eine Torsionsschwingung, sondern enthielt einen erheblichen Anteil an linearen Schwingungen. Bei der statischen Methode trat zusätzlich das Problem auf, dass die Fäden, an denen sich die Schalen mit den Massestücken befanden, während dem Versuch nicht in den vorgesehenen Kerben blieben und somit das Ablesen der Auslenkungen verfälschten. Aufgrund dieser grossen Anzahl an Fehlerquellen sind die Messwerte relativ ungenau.

# Literatur

[1] W. Walcher. *Praktikum der Physik.* Teubner Studienbücher Physik, 1994.

[2] Bergmann, Schäfer. *Lehrbuch der Experimentalphysik - Mechanik, Relativität, Wärme - Band 1.* Walter de Gruyter, 11. Auflage

[3] Christian Gerthsen. *Physik.* Springer - Lehrbuch, 1993

[4] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik.* Fachbuchverlag Leipzig 1996, 16. Auflage

[5] H. Breuer. *DTV - Atlas zur Physik Band 1, Band 2* Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG. München 1994, 4. Auflage