

# Versuch Nr. 5

## Viskosität von Flüssigkeiten

Gruppe W 7

Andreas Josef Birnesser

[Andreas.Birnesser@wirtschaftsphysik.de](mailto:Andreas.Birnesser@wirtschaftsphysik.de)

Sascha Wagner

[Sascha.Wagner@wirtschaftsphysik.de](mailto:Sascha.Wagner@wirtschaftsphysik.de)

Durchgeführt am 04. Oktober 2000

Erste Abgabe am 09. Oktober 2000

Zweite Abgabe am 18. Oktober 2000

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Abbildungsverzeichnis</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b> .....	<b>4</b>
2.1. Dynamik von Fluiden .....	4
2.1.1. Navier – Stokes – Gleichung.....	4
2.1.2. Strom und Stromdichte.....	4
2.1.3. Kontinuitätsgleichung: .....	5
2.1.4. Bernoulli – Gleichung: .....	5
2.2. Viskosität .....	6
2.2.1. Innere Reibung .....	6
2.2.2. Molekulare Deutung der Temperaturabhängigkeit .....	7
2.3. Laminare und turbulente Strömungen .....	8
2.3.1. Definition .....	8
2.3.2. Die Reynolds - Zahl .....	8
2.4. Das Hagen – Poiseuille – Gesetz .....	8
2.5. Das Stokessche Widerstandsgesetz für Kugeln .....	9
2.6. Auftrieb und Archimedisches Prinzip.....	10
<b>3. Versuchsbeschreibung</b> .....	<b>11</b>
3.1. Messung der Viskosität nach Stokes.....	11
3.2. Höppler – Viskosimeter .....	12
3.3. Bestimmung der Aktivierungsenergie von Wasser.....	12
3.4. Ubbelohde – Viskosimeter.....	13
<b>4. Versuchsauswertung</b> .....	<b>14</b>
4.1. Messung der Viskosität nach Stokes.....	14
4.2. Höppler – Viskosimeter .....	15
4.3. Bestimmung der Aktivierungsenergie von Wasser.....	16
4.4. Ubbelohde – Viskosimeter.....	17
<b>5. Fehlerdiskussion</b> .....	<b>20</b>
5.1. Messung der Viskosität nach Stokes.....	20
5.2. Höppler – Viskosimeter .....	20
5.3. Bestimmung der Aktivierungsenergie von Wasser.....	20
5.4. Ubbelohde – Viskosimeter.....	21
<b>6. Literaturverzeichnis</b> .....	<b>22</b>

## 1. ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1: Kontinuitätsgleichung .....	5
Abbildung 2: „Scherung“ einer Flüssigkeit .....	6
Abbildung 3: Auftrieb .....	10
Abbildung 4: Stokes - Viskosimeter .....	11
Abbildung 5: Höppler Viskosimeter .....	12
Abbildung 6: Ubbelohde- Viskosimeter .....	13
Abbildung 7: Abhängigkeit von $1/r^2$ und der Zeit $t$ .....	15
Abbildung 8: Aktivierungsenergie des Wassers .....	17
Abbildung 9: kinematische Viskosität in Abhängigkeit des Glyceringehalts .....	19
Abbildung 10: kinematische Viskosität im Bereich von $70 \text{ m}^2/\text{s}$ bis $170 \text{ m}^2/\text{s}$ .....	19

## 2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

### 2.1. Dynamik von Fluiden

#### 2.1.1. Navier – Stokes – Gleichung

Die Grundlage für jede quantitative Behandlung der Dynamik von Fluiden ist das zweite Newtonsche Axiom:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (1)$$

wobei  $\mathbf{F}$  die Summe aller Kräfte auf ein Volumenelement des Fluids ist. Zur Vereinfachung betrachtet man lediglich den Einfluss der Druckkraft, der Reibungskraft und der Schwerkraft, d.h. man geht von einem inkompressiblen, elektromagnetisch neutralen, makroskopischen Fluid in einem Inertialsystem aus. Claude Navier (1785 – 1836) und George Stokes (1819 – 1903) leiteten die nach ihnen benannte **Navier – Stokes – Gleichung** her:

$$\mathbf{r} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} \right] = -\nabla \cdot p + \mathbf{h} \cdot \nabla^2 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{g} \quad (2)$$

Hier ist  $\mathbf{r}$  die Massendichte des Fluids,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  seine Geschwindigkeit,  $\mathbf{h}$  seine Viskosität,  $p$  der Druck und  $\mathbf{g}$  die Erdbeschleunigung.

Diese Gleichung ist eine nichtlineare, partielle Differentialgleichung und enthält die gesamte klassische Hydrodynamik. Ihre Lösung liefert die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  eines Fluidelements in Abhängigkeit von Zeit und Ort. Die Navier – Stokes – Gleichung lässt sich jedoch in den seltensten Fällen vollständig analytisch lösen. Man muss daher bei der Betrachtung technischer Probleme auf Vereinfachungen zurückgreifen.

#### 2.1.2. Strom und Stromdichte

Im folgenden sollen die in der Hydrodynamik gebräuchlichen Stromgrößen erläutert werden. Als *Strom*  $\mathbf{f}$  bezeichnet man die Menge einer Größe welche pro Zeiteinheit eine Fläche  $A$  durchquert:

Der *Massenstrom* für auf der Fläche veränderliche bzw. konstante Geschwindigkeiten ist somit:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_m &= \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \\ \mathbf{f}_m &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \cdot A \end{aligned} \quad (3)$$

und der *Volumenstrom* für auf der Fläche veränderliche bzw. konstante Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_V &= \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \\ \mathbf{f}_V &= \mathbf{v} \cdot A \end{aligned} \quad (4)$$

Als *Stromdichte*  $\mathbf{j}$  bezeichnet man den auf die Querschnittsfläche bezogenen Strom  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{j}_m = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \quad (5)$$

und

$$\mathbf{j}_V = \mathbf{v} \quad (6)$$

### 2.1.3. Kontinuitätsgleichung:

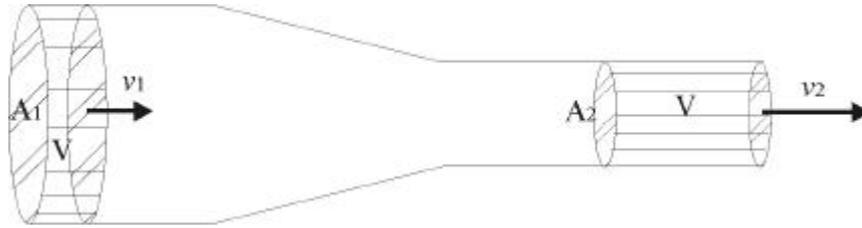


Abbildung 1: Kontinuitätsgleichung

Man betrachtet zunächst eine reibungsfreie Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Die Flüssigkeit fließe durch eine horizontale Röhre, welche ihren Querschnitt von  $A_1$  auf  $A_2$  ändert. Das Volumenelement  $\Delta V_1$  trete mit der Geschwindigkeit  $v_1$  in die Röhre ein. Auf der anderen Seite trete das Volumenelement  $\Delta V_2$  in der selben Zeit mit der Geschwindigkeit  $v_2$  aus der Röhre aus. Aufgrund der Inkompressibilität der Flüssigkeit folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \Delta V_2 \\ A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t &= A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \\ A_1 \cdot v_1 &= A_2 \cdot v_2\end{aligned}\quad (7)$$

Daraus folgt, dass der Volumenstrom für inkompressible Flüssigkeiten konstant ist.

### 2.1.4. Bernoulli – Gleichung:

Bei reibungsfreien und stationären, d.h. zeitunabhängigen Strömungen, kann man die Navier – Stokes – Gleichung umformen zu:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}, \quad (8)$$

woraus man die **Bernoulli-Gleichung** herleiten kann:

$$p + \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{g} \cdot h = const. \quad (9)$$

Mit ihr kann man berechnen, welche Druck- oder Höhendifferenz notwendig ist, um eine bestimmte Ausflussgeschwindigkeit aus einer Wasserleitung zu erhalten. Die Bernoulli-Gleichung gilt als „Energiesatz“ der hydrodynamischen Strömung.

Für horizontale Strömungen ergibt sich die Gleichung:

$$p + \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}^2 = const. \quad (10)$$

Der Term  $\frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}^2$  wird als dynamischer Druck und  $p$  als statischer Druck bezeichnet.

## 2.2. Viskosität

### 2.2.1. Innere Reibung

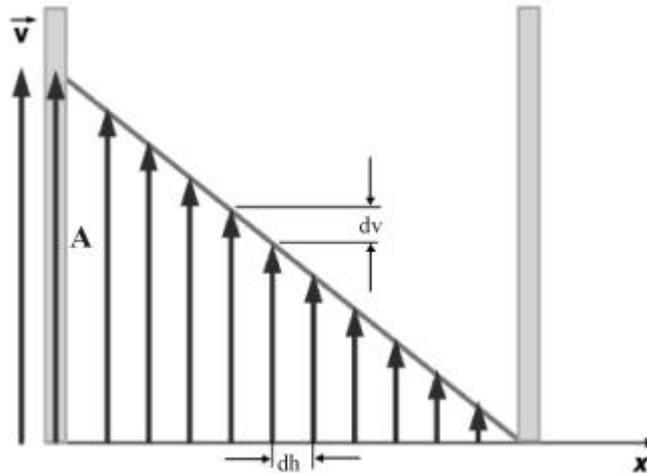


Abbildung 2: „Scherung“ einer Flüssigkeit

Unter Berücksichtigung zwischenmolekularer Kräfte treten sogenannte Scherkräfte in einer bewegten Flüssigkeit auf. Dies kann man an folgendem in Abbildung 1 dargestellten Modell verdeutlichen:

In Abbildung 1 wird die Scherung einer Flüssigkeit, die sich zwischen zwei vertikale Platten mit der Fläche  $A$ , befindet, dargestellt. An der linken Platte greife eine tangentielle Kraft  $F_{\parallel}$  an, welche benötigt wird, um die als unendlich ausgedehnt definierte Platte mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  zu bewegen. Dieser Kraft wirkt die viskose Reibungskraft  $F_R$  entgegen. Man geht davon aus, dass sich die linke Flüssigkeitsschicht mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, d.h. die Moleküle haften an der Platte und dass die rechte Schicht in Ruhe bleibt. Dazwischen stellt man für die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsschichten einen annähernd linearen Verlauf mit dem Abstand  $x$  fest. Allgemein bezeichnet man das Verhältnis, der auf die Fläche  $A$  wirkenden Kraft  $F_{\parallel}$  bzw.  $F_R$  zum dazu senkrechten Geschwindigkeitsgradienten als **dynamische Viskosität  $h$** :

$$h = \frac{F_{\parallel}}{A} \cdot \frac{dh}{dv} = \frac{F_R}{A} \cdot \frac{dh}{dv} = \tau \cdot \frac{dh}{dv} \quad (11)$$

Die dynamische Viskosität geteilt durch die Dichte des betreffenden Stoffes ist definiert als die **kinematische Viskosität**:

$$z = \frac{h}{\rho} \quad (11a)$$

Beispiele für die Viskosität bei  $20^{\circ}\text{C}$ <sup>1</sup>:

Wasser  $h = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Quecksilber  $h = 1,55 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Mineralöl  $h = 400 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Teer  $h = 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

<sup>1</sup> Quelle: Bergmann-Schäfer S.505

### 2.2.2. Molekulare Deutung der Temperaturabhängigkeit

Anhand von Abbildung 1 zeigt sich, dass bei der Scherung eines Fluids aufgrund des horizontalen Geschwindigkeitsgradienten ein von links nach rechts abnehmender Vertikalimpuls existiert. Gelangt nun jedoch durch die thermische Bewegung ein Molekül aus einer linken in eine rechte Schicht, so bringt es einen größeren Vertikalimpuls mit bzw. umgekehrt. Insgesamt fließt daher ein Impulsstrom von links nach rechts.

#### Viskosität von Gasen

Wenn man das Modell eines Idealen Gases zugrunde legt, so kann man den Impulstransport durch ein einziges Molekül dieses Gases berechnen. Ein Gasmolekül stößt in unregelmäßigen Zeitabständen mit anderen zusammen. Diese Zeitabstände gemittelt ergeben die Stoßzeit und aus ihr lässt sich die freie Weglänge eines Moleküls berechnen, die von der Molekülart und der Moleküldichte abhängig ist.

Man nimmt nun an, dass ein Molekül, das in einem bestimmten Abstand zur linken Platte die Horizontalgeschwindigkeit  $v'$  besitzt, beim nächsten Stoß mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/6$  auf die linke Platte trifft. Dort muss nun von der Platte die Geschwindigkeitsdifferenz ausgeglichen werden. Mit diesem Ergebnis, der Definitionsgleichung der Viskosität und einer Gleichung aus der Gastheorie kommt man nun zu folgender Abhängigkeit:

$$h \sim \sqrt{T} \quad (12)$$

Bei realen Gasen ergibt sich allerdings die Abhängigkeit:

$$h \sim T^{0,7} \quad (13)$$

Dies beruht auf der anziehenden Wechselwirkung realer Gase. Wichtig ist, dass die Viskosität unabhängig von Druck und Dichte des Gases ist. Dies resultiert aus der sinkenden freien Weglänge und dem damit verbundenen uneffektiveren Impulstransport bei steigendem Druck bzw. Dichte.

#### Viskosität von Flüssigkeiten

Bei Flüssigkeiten liegt die freie Weglänge in der Größenordnung des mittleren Molekül-abstands. Somit muss man die Wechselwirkungsenergie mit den Nachbarmolekülen mit einbeziehen. Man betrachtet nun in den einzelnen Molekülschichten der Flüssigkeit den Platzwechsel einzelner Moleküle, welcher nur durch eine Verschiebung der Moleküle der angrenzenden Schichten vonstatten geht. Hierfür wird Energie benötigt, die sogenannte Aktivierungsenergie  $\Delta E$ , welche mit zunehmender Temperatur  $T$  abnimmt.

Aus diesen Zusammenhängen kann die folgende Arrhenius – Gleichung hergeleitet werden:

$$h = A \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E}{RT}\right) \quad (14)$$

wobei  $R$  die allgemeine Gaskonstante und  $A$  eine weitere Konstante ist.

Genauere Untersuchungen ergeben, dass der Logarithmus von  $(h/T)$  ungefähr linear von  $1/T$  abhängt, d.h. die Viskosität nimmt mit steigender Temperatur ab.

## 2.3. Laminare und turbulente Strömungen

### 2.3.1. Definition

Von *laminaren Strömungen* spricht man dann, wenn die Geschwindigkeit an jeder Stelle des Fluids monoton von der Zeit abhängt. Laminare Strömungen treten überwiegend dann auf, wenn bei großer Viskosität eine recht geringe Strömungsgeschwindigkeit gegeben ist. Das wohl berühmteste Beispiel für eine laminare Strömung ist der menschliche Blutkreislauf, aber auch der Flüssigkeitstransport in Pflanzen oder ein langsam fließender Fluss können laminar sein.

Von *turbulenten Strömungen* spricht man dann, wenn sich die Geschwindigkeit  $v(t)$  an irgendeinem Ort so unregelmäßig ändert, dass man den zeitlichen Verlauf nicht vorhersagen kann. Als Beispiel kann man schnell ziehende Wolken oder einen Wasserfall nennen.

Zwischen Laminarität und Turbulenz existiert noch eine dritte Form, die erst in den letzten Jahren erforscht wurde. Bei den sogenannten periodischen Strömungen bleibt  $v(t)$  nicht konstant, sondern ändert sich periodisch. Beispiele für solche periodischen Strömungen sind Schallwellen oder Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten.

### 2.3.2. Die Reynolds - Zahl

Die Reynolds – Zahl ist definiert als:

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot L \cdot v}{\eta} \quad (15)$$

Diese Gleichung kann unter Berücksichtigung sämtlicher Randbedingungen aus der Navier – Stokes – Gleichung gewonnen werden. Die Reynolds – Zahl nimmt bei gegebener Dichte  $\rho$  und gegebener Linearabmessung des Körpers  $L$  mit wachsender Geschwindigkeit  $v$  und sinkender Viskosität  $\eta$  zu.

Um eine Grenze zwischen laminarer und turbulenter Strömung einigermaßen abschätzen zu können, führt man einen kritischen Wert  $\text{Re}_{krit}$  ein, welcher bei normalen Versuchsbedingungen zwischen 1 und 10.000 liegt.

Für eine Reynolds – Zahl, kleiner als der kritische Wert, ist die Strömung gegen äußere Störungen stabil, das heißt die Störung klingt mit der Zeit ab und die Strömung bleibt laminar.

Überschreitet die Reynolds – Zahl jedoch den kritische Wert, so ist eine laminare Strömung gegen kleinste Störungen instabil. Die Störung „schaukelt sich auf“. Die vorher laminare Strömung beginnt turbulent zu werden.

Allerdings ist der kritische Wert nach oben nicht so eine starre Grenze wie dies den Anschein erwecken kann. In der Praxis gibt es zwar unterhalb dieses Wertes keine dauerhafte turbulente Strömung, aber oberhalb ist eine laminare Strömung durchaus möglich. Bei idealen Randbedingungen ist eine laminare Strömung auch für eine Reynolds – Zahl von 100.000 möglich.

## 2.4. Das Hagen – Poiseuille – Gesetz

Eine inkompressible Flüssigkeit fließe durch ein Rohr mit dem Radius  $R$ , wobei die Geschwindigkeit in der Rohrmitte ihr Maximum hat und an den Rändern verschwindet. Um die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr zu berechnen, nimmt man an, dass die Bewegung stationär verläuft, und dass die Schwerkraft vernachlässigt werden kann.

Im Inneren des Rohres befindet sich ein Flüssigkeitszylinder mit dem Radius  $r$  und der Länge  $l$ .

Im stationären Zustand muss also die Reibungskraft auf den Zylindermantel nach Gleichung (11)

$$F_R = \mathbf{h} \cdot A \cdot \frac{dv}{dr} = \mathbf{h} \cdot 2 \cdot \mathbf{p} \cdot r \cdot l \cdot \frac{dv}{dr} \quad (16)$$

durch die von der Druckdifferenz verursachten entgegengerichtete Kraft

$$F_{\Delta p} = (p_1 - p_2) \cdot A = (p_1 - p_2) \cdot \mathbf{p} \cdot r^2 = \Delta p \cdot \mathbf{p} \cdot r^2 \quad (17)$$

kompensiert werden. Daraus folgt:

$$dv = -\frac{\Delta p}{2 \cdot \mathbf{h} \cdot l} \cdot r \cdot dr \quad (18)$$

Nach der Integration folgt unter Berücksichtigung der Randbedingung  $v(R) = 0$ :

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4 \cdot \mathbf{h} \cdot l} \cdot (R^2 - r^2) \quad (19)$$

Die Geschwindigkeitsverteilung im Rohrrinnern ist also parabolisch. Will man den Volumenstrom berechnen, so betrachtet man einen Hohlzylinder mit dem inneren Radius  $r$  und dem äußeren  $r + dr$ . Durch ihn strömt pro Zeiteinheit ein Volumen

$$dV = v \cdot dA \cdot dt = v(r) \cdot 2 \cdot \mathbf{p} \cdot r \cdot dr \cdot dt \quad (20)$$

Für den Volumenstrom nach Gleichung (4) gilt nach der Integration über den ganzen Querschnitt:

$$\mathbf{f}_V = \frac{dV}{dt} = A \cdot \bar{v} = \int_0^R v(r) \cdot 2 \cdot \mathbf{p} \cdot r \cdot dr = \frac{\mathbf{p}}{8 \cdot \mathbf{h}} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot R^4 \quad (21)$$

Diese Beziehung wird als Gesetz von Hagen – Poiseuille bezeichnet. Daraus folgt für die mittlere Geschwindigkeit im Rohr:

$$\bar{v} = \frac{\Delta p}{8 \cdot \mathbf{h} \cdot l} \cdot R^2 \quad (22)$$

## 2.5. Das Stokessche Widerstandsgesetz für Kugeln

Eine Kugel mit dem Radius  $R$  und der Geschwindigkeit  $v$  erfährt bei einer Bewegung durch ein unendlich ausgedehntes Medium mit der Viskosität  $\mathbf{h}$  eine Reibungskraft.

Nach der Definition der Viskosität gilt:

$$F = -\mathbf{h} \cdot A \cdot \frac{dv}{dr}$$

Setzt man nun für die Fläche  $A$  in der Gleichung die Oberfläche der Kugel ein, so erhält man folgende Näherung für den Kugelfall:

$$F \approx -\mathbf{h} \cdot 4 \cdot \mathbf{p} \cdot R \cdot v$$

Genauere Berechnungen führen zu folgendem Ergebnis:

$$F = -6 \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{h} \cdot v \cdot R \quad (23)$$

Diese Gleichung wird als das Gesetz von Stokes bezeichnet. Mit dieser Kraft muss man also an der Kugel ziehen, um die Geschwindigkeit  $v$  aufrecht zu erhalten. Natürlich gilt die Gleichung auch, wenn die Kugel an einem festen Ort ruht und sich das Medium vorbeibewegt.

Allerdings gilt die Stokes – Gleichung nur für sehr kleine Reynolds – Zahlen, da Stokes bei seiner Herleitung von sehr geringen Geschwindigkeiten der Kugel ausging. In der Literatur ist sehr häufig die Forderung  $Re < 0,1$  zu finden.

## 2.6. Auftrieb und Archimedisches Prinzip

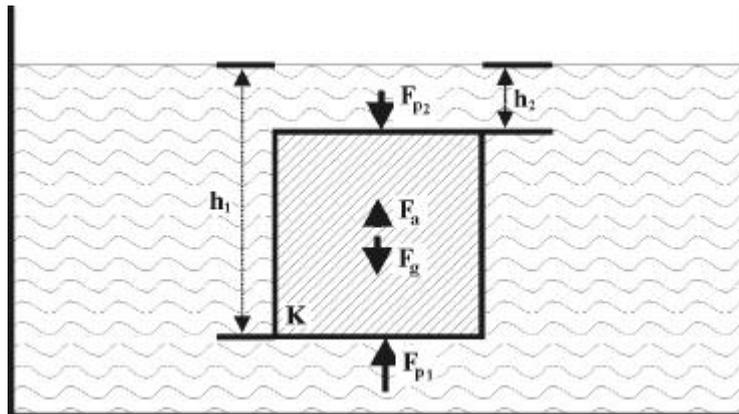


Abbildung 3: Auftrieb

Ein Körper wird gemäß der Abbildung vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht. Auf ihn wirkt von oben der durch die Flüssigkeitshöhe  $h_2$  bedingte Druck  $p_2$  und von unten der durch die Höhe  $h_1$  gegebene Druck  $p_1$ . Auf die Seitenteile wirken von recht und links jeweils Seitendruckkräfte, welche sich aber immer paarweise aufheben, d.h. der Körper bleibt in der Horizontalen in Ruhe. Der Körper erfährt also in einer Flüssigkeit mit der Dichte  $\rho_F$  eine resultierende Kraft nach oben, die als Auftriebskraft bezeichnet wird:

$$F_A = F_{p_1} - F_{p_2} = A \cdot (p_1 - p_2) = A \cdot \rho_F \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = V_F \cdot \rho_F \cdot g \quad (24)$$

Die rechte Seite der Gleichung stellt die Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge dar. Diese Tatsache wird als *Archimedisches Prinzip* bezeichnet.

Betrachtet man zusätzlich noch die Gewichtskraft  $F_G$  des eingetauchten Körpers, so lässt sich Gleichung (24) umschreiben zu:

$$F = F_G - F_A = (\rho_K - \rho_F) \cdot g \cdot V_K \quad (25)$$

Der eingetauchte Körper erfährt also einen scheinbaren Gewichtsverlust.

Falls  $F_G \leq F_A$ , d.h. es gilt  $\rho_F \geq \rho_K$ , schwimmt der Körper

Falls  $F_G > F_A$ , d.h.  $\rho_F < \rho_K$ , sinkt der Körper in der Flüssigkeit ab.

### 3. VERSUCHSBESCHREIBUNG

#### 3.1. Messung der Viskosität nach Stokes

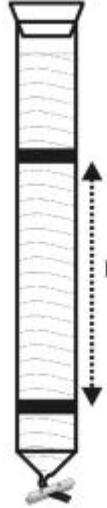


Abbildung 4: Stokes - Viskosimeter

Das Viskosimeter nach Stokes, welches in der Abbildung 4 dargestellt ist, besteht aus einem langen mit einer Flüssigkeit gefüllten Glasrohr, welches auf der unteren Seite verschlossen ist. Man lässt Kugeln mit verschiedenen Radien, die sehr klein gegenüber dem Durchmesser der Röhre sind in der Apparatur absinken. Die Kugel muss von einer laminaren Strömung umströmt werden.

Die Kugeln werden auf einer kurzen Strecke beschleunigt und bewegen sich anschließend mit konstanter Geschwindigkeit nach unten weiter. Es muss also ein Gleichgewichtszustand aller an der Kugel angreifender Kräfte vorhanden sein.

Auf die Kugel wirken folgende Kräfte:

Stokessche Reibungskraft:  $F_R = -6 \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot r \cdot \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{v}$

Auftriebskraft:  $F_A = -\boldsymbol{r}_{Fl} \cdot V_{Kugel} \cdot \boldsymbol{g}$

Gewichtskraft:  $F_G = \boldsymbol{r}_{Kugel} \cdot V_{Kugel} \cdot \boldsymbol{g}$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 F_R + F_A &= -F_G \\
 -6 \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot r \cdot \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{r}_{Fl} \cdot V_{Kugel} \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{r}_{Kugel} \cdot V_{Kugel} \cdot \boldsymbol{g} &= 0 \\
 -6 \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot r \cdot \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{4}{3} \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot r^3 \cdot \boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{r}_{Kugel} - \boldsymbol{r}_{Fl}) &= 0 \\
 \boldsymbol{h} &= \frac{2 \cdot \boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{r}_{Kugel} - \boldsymbol{r}_{Fl}) \cdot r^2 \cdot t}{9 \cdot l}
 \end{aligned}$$

Im Versuch wird nun die Zeit gemessen, in der die Kugel die Strecke  $l$  zurücklegt. Mit der Zeitmessung darf jedoch erst begonnen werden, wenn sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit bewegt und nicht mehr beschleunigt wird. In der obigen Formel zeigt sich nun die Abhängigkeit der Fallzeit vom Kugelradius.

### 3.2. Höppler – Viskosimeter

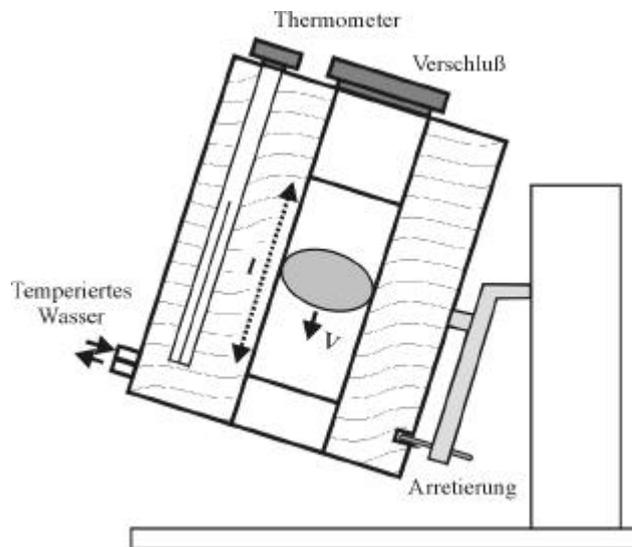


Abbildung 5: Höppler Viskosimeter

Das Viskosimeter nach Höppler, welches in der Abbildung 4 dargestellt wird, besteht aus einem Fallrohr, welches von einem Glasrohr umgeben ist. Durch das äußere Rohr kann ein Flüssigkeitsstrom von sehr konstanter Temperatur geleitet werden, welche auf dem, je nach Temperaturbereich wechselbaren Thermometer, abgelesen werden kann. Die Apparatur ist drehbar gelagert, so dass mehrere Versuche bei der selben Temperatur und unter den selben Bedingungen durchgeführt werden können, ohne es zu öffnen.

Da der Radius der Kugel nahezu dem Radius des Fallrohres entspricht, lässt sich die Stockessche Reibungskraft nicht mehr anwenden. Der Reibungswiderstand wird hauptsächlich durch die Strömung zwischen Kugel und Rohr bestimmt. Das Fallrohr ist um 5-10 Grad gegen die Vertikale geneigt, um einen reproduzierbaren Fallvorgang zu erzielen.

Für den Fall der Kugel gilt folgende Beziehung:

$$h = k \cdot (r_1 - r_2) \cdot t,$$

wobei  $k$  eine Apparatekonstante ist. In unserem Fall wurde der Versuch mit Wasser durchgeführt, mit dem Ziel die Apparatekonstante zu bestimmen.

### 3.3. Bestimmung der Aktivierungsenergie von Wasser

Durch das logarithmieren der Arrhenius – Gleichung (14) erhält man folgende Gleichung:

$$\ln h = \ln A - \frac{\Delta E}{RT}$$

Mit Hilfe der Steigung des  $\frac{1}{T} - \ln h$ -Diagramms und tabellarischen Werten von  $h = h(T)$  kann die Aktivierungsenergie  $\Delta E$  bestimmt werden.

### 3.4. Ubbelohde – Viskosimeter

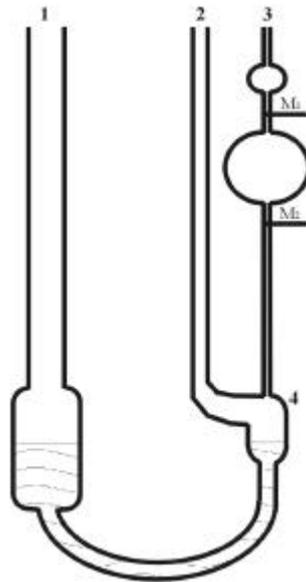


Abbildung 6: Ubbelohde- Viskosimeter

Das Ubbelohde Viskosimeter befindet sich in einem Wasserbad, das mit Hilfe einer Umwälzpumpe auf konstanter Temperatur gehalten wird. Das zunächst in der Kapillare 1 eingefüllte Flüssigkeitsvolumen wird durch einen an der Öffnung der Kapillare 1 erzeugten Überdruck in die Kapillare 3 hochgedrückt. Während dieses Vorgangs muss der Rohransatz von 2 verschlossen werden. Ist die Flüssigkeit in Kapillare 3 im obersten Vorratsgefäß angekommen, so gibt man die Öffnungen der beiden Kapillaren wieder frei. Nun beginnt die Flüssigkeit abzulaufen. Man misst nun die Zeit, welche die Flüssigkeit benötigt, um die markierte Strecke von  $M_1$  nach  $M_2$  zu durchlaufen. Bei 4 herrscht nun genau so Atmosphärendruck, wie an der oberen Öffnung 3, jedoch ergibt sich durch die Flüssigkeitssäule die Druckdifferenz:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$$

Mit Hilfe der Hagen – Poiseuille – Gleichung ergibt sich folgende Gleichung:

$$z = \frac{h}{\rho} = \frac{\rho \cdot g \cdot h \cdot R^4}{8 \cdot l \cdot V} \cdot t$$

$$\Rightarrow z = k \cdot t$$

wobei  $k$  eine Gerätekonstante ist. Dieser Vorgang ist nicht von der Oberflächenspannung der Flüssigkeit abhängig, sondern nur von der Apparatekonstanten  $k$ .

## 4. VERSUCHSAUSWERTUNG

### 4.1. Messung der Viskosität nach Stokes

#### Messen der Kugeldaten

Bezeichnungen:  $r$ : Kugelradius  
 $m$ : Kugelmasse

Messungenauigkeit  $\Delta r$ : 0,01 mm

Messungenauigkeit  $\Delta m$ : 0,001 g

	Kugel 1	Kugel 2	Kugel 3	Kugel 4
Radius $r$ in mm	2,00	1,50	1,00	0,50
Masse $m$ in g	0,260	0,110	0,033	0,004
$1/r^2$ in $1/\text{mm}^2$	0,25	0,44	1,00	4,00

#### Versuchsdaten

Fallstrecke  $l$ : 504,5 mm

Messungenauigkeit  $\Delta l$ : 0,5 mm

	Kugel 1	Kugel 2	Kugel 3	Kugel 4
	Zeit $t$ in s			
Messung 1	3,56	5,64	* 12,77 *	44,11
Messung 2	3,52	5,66	11,70	43,69
Messung 3	3,41	5,59	11,52	43,66
Messung 4	3,40	5,48	11,41	43,22
Messung 5	3,50	5,47	11,50	42,92
Messung 6	3,41	5,43	11,37	42,78
Messung 7	3,41	5,28	11,40	41,48
Messung 8	3,47	5,51	11,45	41,02
arithmetisches Mittel	3,46	5,51	11,48	42,86
Varianz $s$ in $s^2$ :	0,004	0,015	0,012	1,189
Standardabweichung $s$ :	0,061	0,124	0,112	1,090

\* Bemerkung : Bei der ersten Messung der Fallzeit von Kugel 3 war eine gut sichtbare Luftblase an der Kugel gehaftet. Diese Luftblase verursachte einen zusätzlichen Auftrieb der Kugel, was das Messergebnis eindeutig verfälschte. Deshalb wurde dieser Wert bei der Auswertung nicht berücksichtigt.

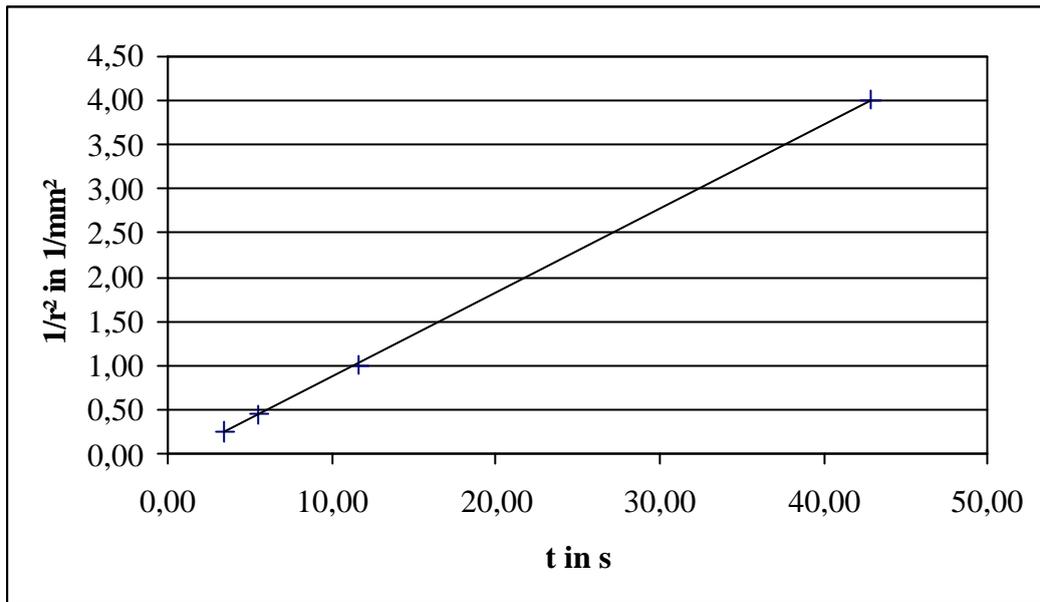


Abbildung 7: Abhängigkeit von  $1/r^2$  und der Zeit  $t$

Die Lineare Regression ergibt eine Gerade mit der Steigung  $z = 0,95 \frac{1}{\text{mm}^2 \cdot \text{s}}$ . Man erkennt also, dass der im Theorieteil beschriebene Zusammenhang richtig ist.

Die Viskosität lässt sich nicht berechnen, da die Dichte des Glycerins in der Röhre nicht homogen und damit nicht eindeutig bestimmbar ist. Der Grund dafür ist die Verunreinigung des Glycerins mit Wassermolekülen, welche durch die Hygroskopie des Glycerins verursacht wird.

#### 4.2. Höppler – Viskosimeter

Bezeichnungen:	<b>J</b> :	Temperatur des Wassers in °C
	<b>t</b> :	Fallzeit der Kugel in s
	<b>h</b> :	Viskosität von Wasser in $\mu\text{Pa s}$
	$s_t$ :	Standardabweichung der Zeit in s
	<b>k</b> :	Gerätekonstante in $10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Formeln: 
$$k = \frac{h}{t}$$

Messungenauigkeit  $\Delta J$  der Temperatur: 0,1 K

Messungenauigkeit  $\Delta t$  der Zeit: 0,4 s

Da die Zwischenwerte der Viskosität von Wasser nur mit Hilfe einer gefitteten Polynomfunktion vom Grad 17 ermittelt worden sind, schätzen wir eine Messungenauigkeit von  $\Delta h = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Pa s}$ .

$J$ in °C	$h$ in $\mu\text{Pas}$	$t_1$ in s	$t_2$ in s	$\bar{t}$ in s	$s_t$ in s	$k$ $\mu\text{N}/\text{m}^2$
21,5	966	135,08	135,34	135,21	0,18	7,14
32,0	764	107,99	106,95	107,47	0,74	7,11
42,0	630	88,02	87,36	87,69	0,47	7,18
51,7	531	74,03	74,18	74,11	0,11	7,17
54,9	504	70,66	70,57	70,62	0,06	7,14

Arithmetisches Mittel:  $\bar{k} = 7,15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Standardabweichung:  $s_k = 0,03 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Varianz:  $s_k^2 = 0,00082 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)^2$

Gauss – Fehler:  $dk = 0,052 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

$$dk = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial h}\right)^2 \cdot \Delta h^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)^2 \cdot (\max(s_t, \Delta t))^2}$$

### 4.3. Bestimmung der Aktivierungsenergie von Wasser

Bezeichnungen:  $T$ : Temperatur des Wassers in K  
 $h$ : Viskosität des Wassers in Pa s  
 $z$ : Steigung der Kurve

Formel:  $E = -R \cdot z$

Von der Richtigkeit der folgenden Literaturwerte für die Viskosität des Wassers gehen wir aus.

$T^{-1}$ in $\text{K}^{-1}$	$\ln \eta$ in $\ln \text{Pa s}$
0,0036630	-6,3244
0,0035971	-6,4890
0,0035336	-6,6393
0,0034722	-6,7776
0,0034130	-6,9048
0,0033557	-7,0234
0,0033003	-7,1338
0,0032468	-7,2370
0,0031949	-7,3338
0,0030960	-7,5109
0,0030030	-7,6696
0,0029155	-7,8129
0,0028329	-7,9434
0,0027548	-8,0629

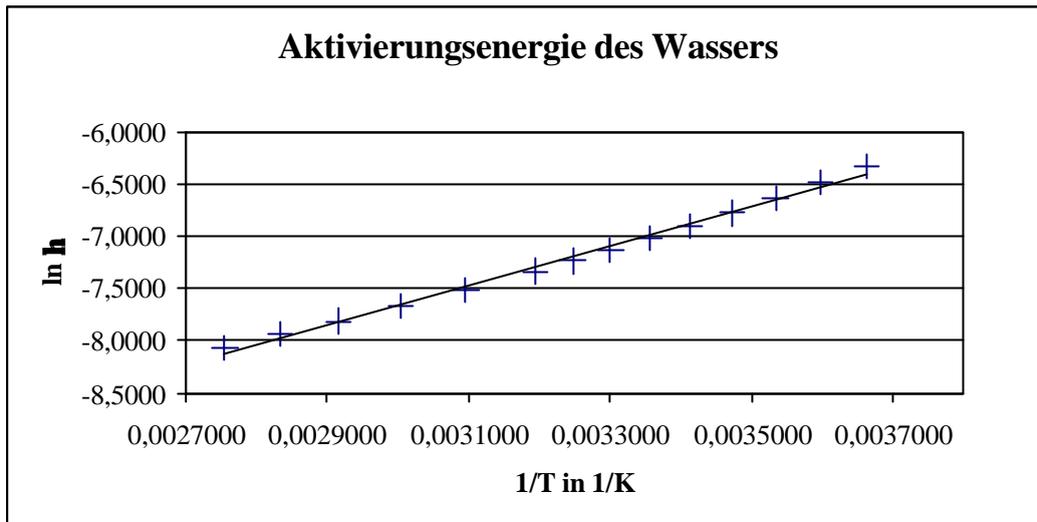


Abbildung 8: Aktivierungsenergie des Wassers

Steigung der Regressionsgeraden:  $z = 1895 \text{ K}$

Mit Hilfe der Arrhenius – Gleichung ergibt sich für die Aktivierungsenergie:

$$\Delta E = -8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 1895 \text{ K} = -15755 \frac{\text{J}}{\text{mol}}$$

Leider war es nicht möglich, einen Literaturwert für die Aktivierungsenergie zu finden. Eine Größtfehlerberechnung war nicht möglich, da die benutzten Werte Literaturwerte sind, und die Regressionsgerade mit Hilfe des Computers berechnet wurde.

#### 4.4. Ubbelohde – Viskosimeter

Bezeichnungen:

- $J$ : Versuchstemperatur in °C
- $t$ : Sinkzeit der Kugel in s
- $s_t$ : Standardabweichung der Zeit
- $s_t^2$ : Varianz der Zeit
- $k$ : Gerätekonstante
- $n$ : kinematische Viskosität

Formeln:

$$k = \frac{n}{t}$$

$$n = \frac{h}{r}$$

Versuchstemperatur  $J$  bei beiden Rohren:  $30,5 \text{ °C}$

Messungenauigkeit  $\Delta J$  der Temperatur:  $0,1 \text{ K}$

Messungenauigkeit  $\Delta t$  der Zeit:  $0,4 \text{ s}$

##### Rohr II:

Apparaten – Nr.:  $48389$

Gerätekonstante  $k$ :  $0,3188$

Rohr III:

Apparaten – Nr.: 50130

Gerätekonstante k: 1,018

	Rohr II	Rohr III
	t in s	t in s
Messung 1	247,18	160,06
	247,15	159,99
Messung 2	249,00	161,91
	249,29	161,91
Messung 3	247,47	162,54
	247,59	162,23

Bemerkung: Jede Messung wurde mit 2 Uhren gestoppt.

Arithmetisches Mittel $\bar{t}$ :	247,95 s	161,44 s
Standardabweichung $s_t$ :	$2,24 \cdot 10^{-2}$ s	$2,71 \cdot 10^{-2}$ s
Varianz $s_t^2$ :	$4,98 \cdot 10^{-4}$ s <sup>2</sup>	$7,33 \cdot 10^{-4}$ s <sup>2</sup>
Kinematische Viskosität $n$ :	$79,045 \frac{m^2}{s}$	$164,346 \frac{m^2}{s}$
Gauss – Fehler $dn$ :	$0,128 \frac{m^2}{s}$	$0,408 \frac{m^2}{s}$
Formel:	$dn = k \cdot \text{Max}(\Delta t; s_t)$	

Aus der Literatur wurden folgende Werte für die kinematische Viskosität in Abhängigkeit von dem Glycerinanteil der Lösung entnommen.

Gewichtsprozent	kinematische Viskosität in m <sup>2</sup> /s
10	1,003
20	1,301
30	1,753
40	2,490
45	3,044
50	3,782
55	4,830
60	6,353
65	8,602
70	12,156
75	18,186
80	28,963
85	49,276
90	93,572
95	199,774
100	495,915

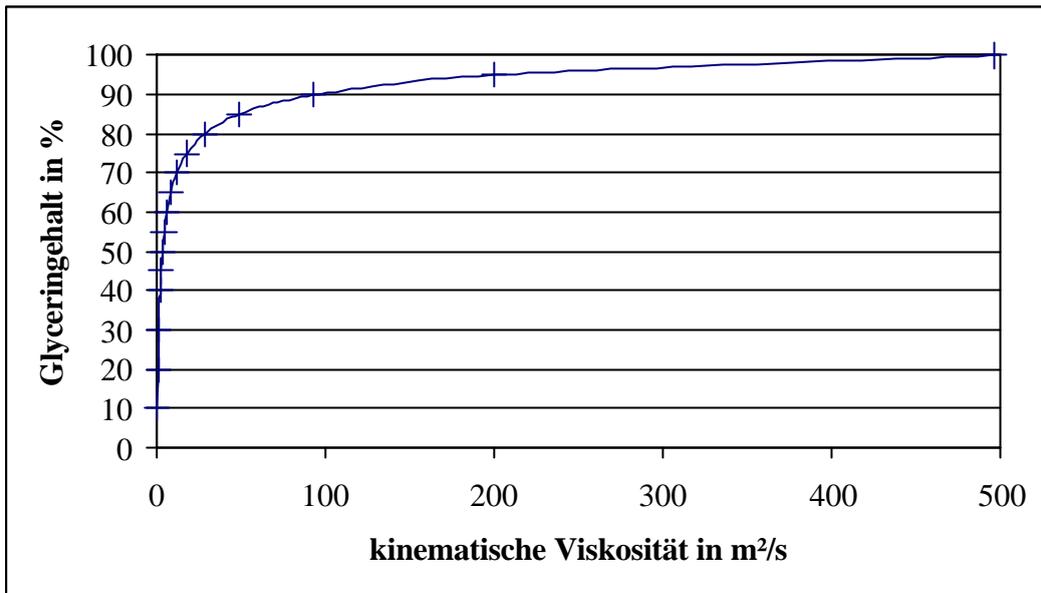


Abbildung 9: kinematische Viskosität in Abhängigkeit des Glyceringehalts

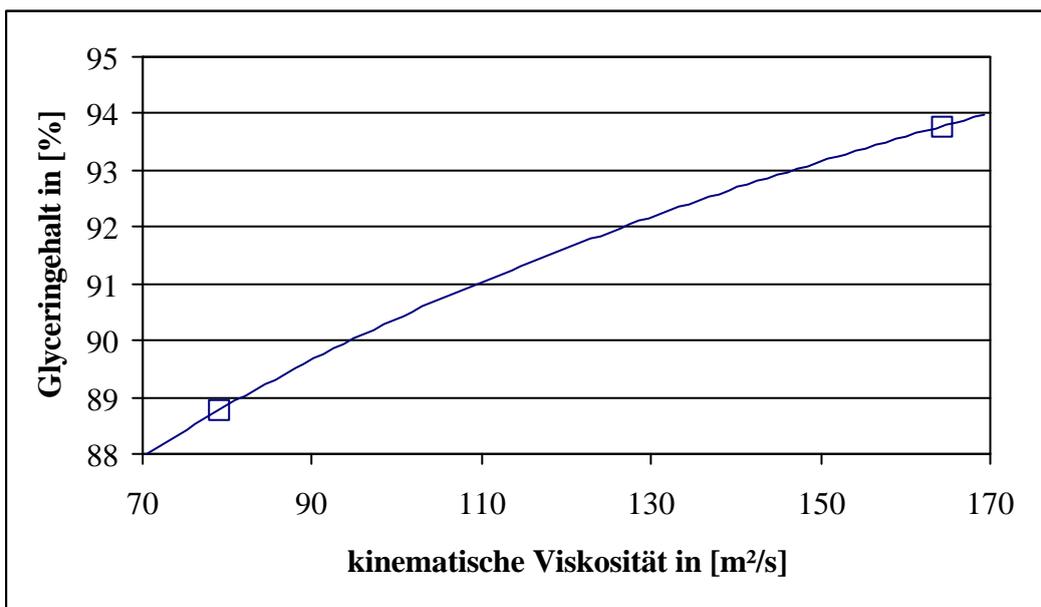


Abbildung 10: kinematische Viskosität im Bereich von  $70 m^2/s$  bis  $170 m^2/s$

Wie aus dem Schaubild entnommen werden kann, ergibt sich für Rohr II ein Glyceringehalt von ungefähr 89 %. Für Rohr III kann der Wert 94 % aus dem Schaubild entnommen werden.

Um eine genauere Analyse zu ermöglichen, haben wir die obige Abhängigkeit mit einer Polynomfunktion 20. Grades gefittet. Für die beiden Rohre ergeben sich dann folgende Werte: In Rohr II war eine 88,7 % Glycerinlösung und in Rohr III eine 93,7 % Glycerinlösung enthalten.

## 5. FEHLERDISKUSSION

### 5.1. Messung der Viskosität nach Stokes

Ein schon in der Versuchsauswertung angesprochener Fehler ist das Anhaften von mehr oder weniger großen Luftblasen, was in einem Fall deutlich zu sehen war, aber in den anderen Fällen in kleinerer Größenordnung nicht auszuschließen ist.

Fällt die Kugel nicht genau in der Mitte herunter, so ergibt sich eine eventuell längere Wegstrecke, aber vor allem gilt die Formel der Stokesschen Reibungskraft nur für unendlich ausgedehnte Flüssigkeitsbehälter, d.h. je näher am Rand die Kugel fällt, desto größer ist der Fehler der Messung.

Ein sehr wichtiger Punkt ist die nicht konstante Viskosität des Glycerins aufgrund der Einlagerung von Wasser, was einen extremen Einfluss auf die Viskosität hat. Diese variiert vertikal beträchtlich, aber eventuell auch horizontal, was dann auf die verschiedenen Versuche eine Auswirkung hat. Es gibt auch durch den Kugelfall Vermischungen, die auf die nachfolgenden Kugeln eine Auswirkung haben können.

Durch eine Überschlagsrechnung ergibt sich, dass die Forderung nach einer laminaren Strömung – Reynoldszahl  $< 0,1$  – der Stokesschen Gleichung nur für eine Flüssigkeit mit mindestens 80% Glycerinanteil mit Sicherheit erfüllt ist.

Zudem wurden nur eine geringe Anzahl an Messungen durchgeführt.

### 5.2. Höppler – Viskosimeter

Ein Problem bei der Messung war, dass für die Temperaturmessung im Viskosimeter verschiedene Thermometer benutzt wurden. Wie aus der Thermodynamik bekannt, verfälscht dies natürlicherweise das Messergebnis. Vor allem in den niederen Temperaturbereichen ist dies von großer Bedeutung, da sich dort die Viskosität im Gradbereich recht stark ändern kann. Außerdem war es nicht einfach, die eingestellte Temperatur konstant zu halten, d.h. die Temperatur schwankte um  $\pm 0,1\text{K}$ , was auch zu Veränderungen der Viskosität beitrug.

Das Wasser im Fallrohr war durch ein Schmutzpartikel verunreinigt, welcher dazu führte, dass die Kugel eventuell leicht abgebremst wurde. Außerdem blieb die Kugel zu Beginn einer Messung komplett im Rohr stecken.

### 5.3. Bestimmung der Aktivierungsenergie von Wasser

Bei der Betrachtung der Abbildung 3 zeigt sich, dass die Werte doch recht stark um die Regressionsgerade schwanken. Es ist also eindeutig klar, dass die Aktivierungsenergie nur für recht kleine lokale Bereiche bestimmt werden kann. Der von uns ermittelte Wert für die Aktivierungsenergie stellt daher nur einen groben Mittelwert dar. Er sollte bestenfalls zur Orientierung, nicht aber zur weiteren Verwendung in Experimenten oder Rechnungen dienen.

#### **5.4. Ubbelohde – Viskosimeter**

Ein wahrscheinlich recht großer Fehler kommt dadurch zustande, dass nicht immer vollständig gewährleistet war, ob die Apparatur gerade stand, so dass mitunter nur ein Teil der Gewichtskraft wirkte. Die Lösung lief also wahrscheinlich in diesen Fällen etwas langsamer ab.

Ein weiterer wenn auch nicht so bedeutender Fehler liegt darin, dass nur die Literaturwerte der kinematischen Viskosität für 30° C verzeichnet waren. Da unser Versuch jedoch bei 30,5 ° C ablief ergeben sich zusätzliche Fehler.

Die im „Anleitungsheft“ beschriebenen Glycerinanteile von einmal 40 – 85 % und 85 – 100 % konnten von uns nicht bestätigt werden. Wir vermuten, dass beim teilweisen Auffüllen eines Ubbelohde – Viskosimeters versehentlich die Glycerinverhältnisse vertauscht wurden und ein Viskosimeter falsch befüllt wurde, da unsere Werte sich für beide Rohre im Bereich zwischen 85 % und 100 % befinden.

## 6. LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Bergmann – Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik Band 1 Mechanik, Relativität, Wärme.*  
Walter de Gruyter, 1998
- [2] Christian Gerthsen: *Physik.*  
Springer Verlag, 1999
- [3] F. X. Eder: *Moderne Meßmethoden der Physik Teil 1*  
Deutscher Verlag der Wissenschaft, 1968
- [4] Paul A. Tipler: *Physik.*  
Spektrum Akademischer Verlag, 1998
- [5] W. Walcher: *Praktikum der Physik.*  
Teubner Studienbücher, 1989
- [6] George Joos: *Lehrbuch der theoretischen Mechanik.*  
AULA – Verlag, 1989
- [7] D’Ans – Lax: *Taschenbuch für Chemiker und Physiker*  
Springer – Verlag, 1967
- [8] Horst Stöcker: *Taschenbuch der Physik.*  
Harri Deutsch Verlags AG, 1997