Versuch Nr. 4
Drillachse

Anita Lamprecht Michael Buser

24. November 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Drehmoment und Drehimpuls

Das Drehmoment M ist definiert als

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = |r||F| \sin\alpha$$

wobei F die angreifende Kraft, r den orthogonal auf der Drehachse stehenden Vektor vom Schwerpunkt zum Angriffspunkt der Kraft und somit $rsin\alpha$ den sogenannten Hebelarm darstellt. Der Vektor M ist ein axialer Vektor, das sind Vektoren, deren Drehsinn sich bei einmaliger Spiegelung oder Inversion umkehrt. Die Vektoren, bei denen das nicht geschieht und solche die gar keinen Drehsinn besitzen, nennt man polare Vektoren (z.B. F und r). Den Drehimpuls L definiert man als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Die Beziehung zwischen dem Drehmoment und dem Drehimpuls wird als Drehmomentsatz bezeichnet und lautet

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Dies lässt sich mit Hilfe der obigen Definitionen folgendermaßen begründen

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \\
&= \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} \\
&= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}
\end{aligned}$$

bleiben der Abstand r und die Massen m zeitlich unverändert, so gilt

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = 0$$

und somit ist

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\frac{d(\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{x}} = \vec{r} \times \vec{F} =: \vec{M}$$

1.2 Schwerpunkt,Trägheitsmomente,Trägheitstensor und Satz von Steiner

Trägheitsmomente einfach geformter Körper berechnen sich folgendermaßen:

$$I = \int_V r_\perp^2 dm$$

Bei homogenen Körpern mit der Massendichte ρ kann die Beziehung dm durch ρdV ersetzt werden, lässt sich zusätzlich noch dV durch $dr_\perp$ ausdrücken, kann das Integral der untenstehenden Form berechnet werden.

$$I = \rho \int_V r_\perp^2 dV$$

Zur Berechnung des Trägheitsmoments einer Kreisscheibe wird diese in konzentrische Kreisringe zerlegt. Nun geht man davon aus, daß diese Ringe alle die Breite $dr_\perp$, den Achsenabstand $r_\perp$ und die Masse dm besitzen. Läßt sich die Masse eines solchen Ringes durch $dm = 2\pi h\rho r_\perp dr_\perp$ ausdrücken, wobei ρ die Dichte des Scheibenmaterials ist, so gilt: $dJ = r_\perp^2 dm = \pi r^2 h\rho r_\perp^3 dr_\perp$ Damit folgt für das Trägheitsmoment der Kreisscheibe :

$$\begin{aligned} I &= 2\pi h\rho \int_0^R r_\perp r_\perp^2 dr_\perp \qquad (1) \\ &= \pi h\rho \frac{R^4}{2} \\ &= \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$

wobei M die Masse der Scheibe, also $\pi R^2 h\rho$ ist. Da bei dieser Rechnung die Dicke der Scheibe bereits ohne Einschränkung enthalten ist, stellt diese Gleichung auch das Trägheitsmoment eines Vollzylinders da.

Bei unendlich dünnen Kreisscheiben unterscheidet man äquatoriale $I_ä$ (in der Ebene der Kreisscheibe) und polare Trägheitsmomente I_p (orthogonal zur Ebene der Kreisscheibe). Diese sind über folgende Gleichung miteinander verknüpft

$$I_p = 2I_ä$$

Damit gilt für die äquatorialen Trägheitsmomente

$$I_{ä} = \frac{I_p}{2} = \frac{1}{4} M R^2$$

Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders berechnet sich analog zu dem eines Vollzylinders, mit dem Unterschied, daß nicht von 0 bis R, sondern von R_i bis R_a, d.h. vom Innen- bis zum Außenradius integriert wird und sich daraus die Gleichung

$$\begin{aligned} I &= 2\pi h\rho \int\limits_{R_i}^{R_a} r_\perp r_\perp^2 dr_\perp \\ &= \pi h\rho \frac{(R_a - R_i)^4}{2} \\ &= \frac{1}{2} M (R_i^2 + R_a^2) \end{aligned}$$

ergibt, wobei M die Masse des Hohlzylinders, also $\pi(R_a - R_i)^2 h\rho$ ist.

Um das Trägheitsmoment einer Kugel zu berechnen zerlegt man diese in dünne Scheiben, deren Ebenen senkrecht zur Drehachse stehen. Den variierenden Radius dieser Scheiben bezeichnet man mit r, die Dicke einer solchen Scheibe mit dh. Daraus folgt mit (1) für dI:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{1}{2} r^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \pi\rho r^4 dh \end{aligned}$$

Aus $r^2 = R^2 - h^2$ ergibt sich

$$dI = \frac{1}{2} \pi\rho (R^2 - h^2)^2 dh$$

Da h alle Werte von $-R$ bis R angehmen kann, wobei R den Kugelradius darstellt, folgt schließlich für das Trägheitsmoment einer Kugel:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \pi\rho \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - h^2)^2 dh \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi\rho R^5 \\ &= \frac{2}{5} M R^2 \end{aligned}$$

wobei M die Masse der Kugel, d.h. $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$, beschreibt.

Um das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer nicht durch den Schwerpunkt gehenden Achse I zu berechnen, wendet man häufig den Satz von Steiner an. Dieser besagt

$$I = I_s + ma^2$$

wobei I_s das Trägheitsmoment um eine Achse durch den Schwerpunkt, I das Trägheitsmoment desselben Körpers um eine zu dieser Schwerpunktsachse parallele Achse, m die Gesamtmasse des Körpers und a den senkrechten Abstand der beiden Achsen darstellt. Den Schwerpunkt r_s eines Systems von

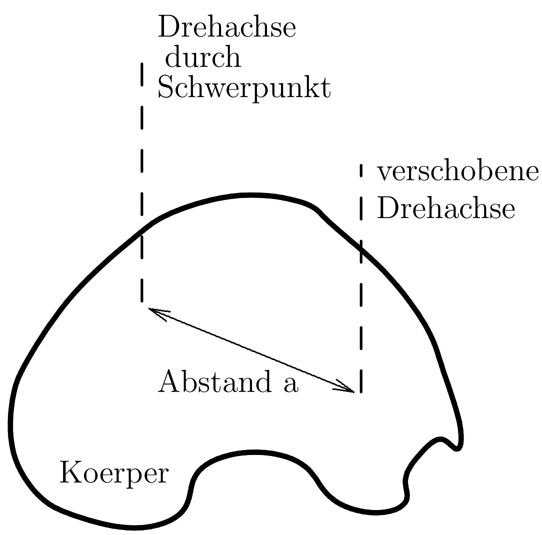

Abbildung 1: Satz von Steiner

Teilchen berechnet man wie folgt

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i m_i}{m_{ges}}$$

Um den Schwerpunkt eines Körpers zu berechnen greift man auf die Gleichung

$$r_s = \int \frac{r}{m_{ges}} dm$$

Aus den Gleichungen zur Schwerpunktsberechnung und aus der obigen Abbildung ergibt sich mit $r_i = a + r_s$

$$\begin{aligned}
I &= \sum r_i^2 m_i = \sum (a^2 + r_s^2 + 2ar_s) m_i \\
&= ma^2 + I_s + \sum 2ar_s m_i \\
&= ma^2 + I_s + 2r_s \sum m_i (r_i - r_s) \\
&= ma^2 + I_s + 2r_s (\sum m_i r_i + \sum m_i r_s) \\
&= ma^2 + I_s + 2r_s (\sum m_i r_i + \sum m_i r_i) \\
&= ma^2 + I_s \\
&= I_s + ma^2
\end{aligned}$$

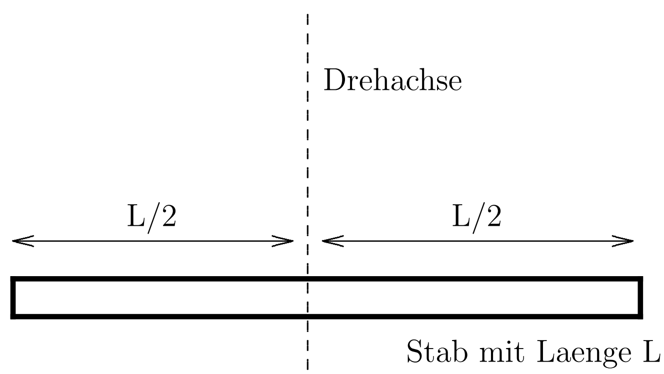

Abbildung 2: Trägheitsmoment eines dünnen, langen Stabes

Das Trägheitsmoment eines dünnen, langen Stabes mit kontinuierlicher Dichte ρ und Querschnitt A berechnet sich mit

$$\begin{aligned}
I &= \int (x^2 + y^2) dm \\
&= \int (x^2 + y^2) \rho dV \\
&= \rho \int (x^2 + y^2) A dx
\end{aligned}$$

Da y am äußeren Ende des Stabes,also maximal entfernt von der Schwerpunktsachse des Körpers im Vergleich zu x klein ist und da das Trägheitsmoment des Stabes in der Nähe der Drehachse durch den Schwerpunkt nach dem Satz von Steiner vernachlässigbar im Vergleich zum Trägheitsmoment des ganzen Stabes ist, kann y in diesem Fall vernachlässigt werden. Somit gilt

$$\begin{aligned} I &= \rho \int x^2 A dx \\ &= \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 A dx \\ &= \rho A [\frac{1}{3} x^3]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \rho A [\frac{1}{3} (\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8})] \\ &= \frac{1}{12} A \rho l^3 \\ &= \frac{1}{12} M l^2 \end{aligned}$$

Der Trägheitstensor ergibt sich durch folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \vec{L} &= I \vec{\omega} \\ &= m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= m(\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})) \end{aligned}$$

für $\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$ gilt nun in Komponentenschreibweise

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) = \begin{pmatrix} r_1(r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + r_3\omega_3 - \omega_1(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \\ r_2(r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + r_3\omega_3 - \omega_2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \\ r_3(r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + r_3\omega_3 - \omega_3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 r_2 \omega_2 + r_1 r_3 \omega_3 - \omega_1 r_2^2 - \omega_1 r_3^2 \\ r_1 r_2 \omega_1 + r_2 r_3 \omega_3 - \omega_2 r_1^2 - \omega_2 r_3^2 \\ r_3 r_1 \omega_1 + r_2 r_3 \omega_2 - \omega_3 r_1^2 - \omega_3 r_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega_1(x_2^2 + x_3^2) & x_1 x_2 \omega_2 & x_1 x_3 \omega_3 \\ \omega_1 x_1 x_2 & -\omega_2(x_1^2 + x_3^2) & x_2 x_3 \omega_3 \\ \omega_1 x_1 x_3 & \omega_2 x_2 x_3 & -\omega_3(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_1x_2 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_1x_3 & -x_2x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m(x_2^2 + x_3^2) & -mx_1x_2 & -mx_1x_3 \\ -mx_1x_2 & m(x_1^2 + x_3)^2 & -mx_2x_3 \\ -mx_1x_3 & -mx_2x_3 & m(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Dabei werden die Trägheitsmomente I_{xx} , I_{yy} und I_{zz} Hauptträgheitsmomente genannt, dies bezeichnet somit die Trägheitsmomente bzgl. der Hauptträgheitsachsen. Die übrigen Trägheitsmomente des Trägheitstensors werden Deviationsmomente genannt.

1.3 Kreisel

Um das Trägheitsmoment eines solchen Kreisels zu bestimmen wird zunächst die Präzessionsfrequenz ω_p des Kreisels bestimmt. Für diese gilt

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt}$$

wobei für $d\varphi$ nach obiger Abbildung

$$d\varphi = \frac{dL}{L}$$

gilt. Dabei gilt für dL

$$dL = mgldt$$

wobei l den Abstand vom Auflagepunkt zum Mittelpunkt des Kreisels darstellt. Diese Gleichung ergibt sich aus dem Drehmomentsatz

$$\dot{L} = M$$

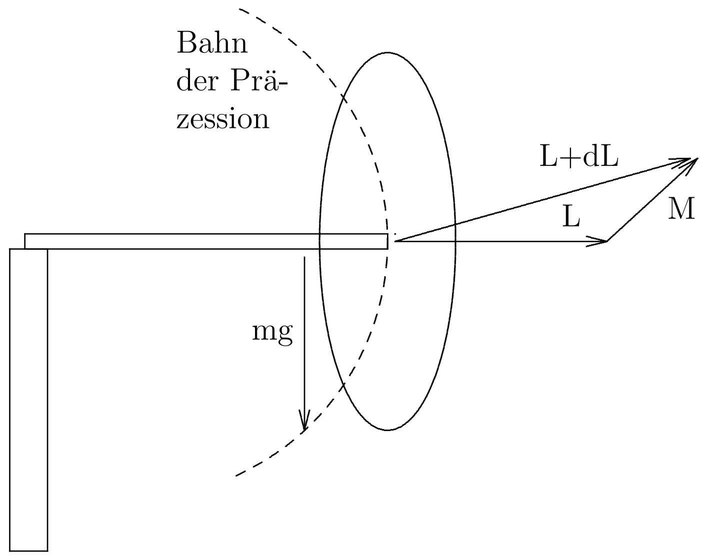

Abbildung 3: Präzession eines Kreisels

Hier gilt

$$\dot{L} = \frac{dL}{dt} = M = mgl$$

und somit

$$dL = mgldt$$

Damit gilt für die Präzessionsfrequenz

$$\begin{aligned} \omega_p &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{Ldt} = \frac{mgldt}{Ldt} = \frac{mgl}{L} \\ &= \frac{mgl}{I\omega} \end{aligned}$$

mit der Umlauffrequenz ω. Daraus ergibt sich für das gesuchte Trägheitsmoment

$$I = \frac{mgl}{\omega_p \omega}$$

2 Versuchsbeschreibung

2.1 Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße D

2.1.1 Statische Methode

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Stativ. Ein um seine Achse drehbar gelagerter Stab ist über eine Spiralfeder mit dem Richtmoment D fest mit dem Stativ verbunden. Am Stabende werden nun zwei horizontale Scheiben vom Radius R_i und R befestigt. An der kleineren der beiden Scheiben mit Radius R_i ist ein Zeiger befestigt, mit dem auf der Skala, die auf der größeren, dünneren Scheibe mit Radius R angebracht ist, der Auslenkwinkel der Scheibe aus ihrer Ruhelage in Grad abgelesen werden kann. An der kleineren Scheibe mit Radius R_i ist ein Faden befestigt, der über eine Rolle gelegt wird. Am Fadenende befindet sich eine Schale zum Auflegen von Massestücken. Auf diese Schale werden Massenstücke der Masse m aufgelegt, auf die die Gewichtskraft $G = mg$ wirkt. Somit wirkt auf den Stab das Drehmoment $M = Fl = GR_i = mgR_i$. Unter der Einwirkung von M_1 dreht sich der an der kleineren Scheibe befestigte Zeiger auf der Skala der größeren Scheibe um den Winkel φ. Das Drehmoment M_2, das dieser Auslenkung aufgrund des Richtmoments D der Spiralfeder entgegenwirkt, läßt sich beschreiben durch

$$M_2 = -D\varphi$$

Aus diesen beiden Drehmomenten ergibt sich

$$M_1 + M_2 = 0$$

da sich das System in Ruhe befindet. Daraus folgt dann

$$M_1 + M_2 = mgR_i - D\varphi = 0$$

und damit folgt für die Winkelrichtgröße der Spiralfeder

$$D = \frac{mgR_i}{\varphi}$$

2.1.2 Dynamische Methode zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D

Nun wird an dem oben bereits beschriebenen Versuchsaufbau am drehbar gelagerten Stab eine Metallstange mit zwei Gewichten so befestigt, daß sich ihr Schwerpunkt in der Drehachse befindet. Bewirkt man nun eine Schwingung des Systems Metallstange und Gewichte, so führt die Bewegung dieser Anordnung über den Drehmomentsatz zum Drehmoment

$$M_3 = \dot{L} = (\dot{I\omega}) = \dot{I}\omega + I\dot{\omega}$$

Da das Trägheitsmoment zeitlich konstant ist, gilt

$$M_3 = I\dot{\omega} = I\ddot{\varphi}$$

Das Drehmoment M_4, das dieser Auslenkung aufgrund des Richtmoments D der Spiralfeder entgegenwirkt, läßt sich beschreiben durch

$$M_4 = -D\varphi$$

Aus diesen beiden Drehmomenten ergibt sich

$$M_3 + M_4 = 0$$

Daraus folgt dann

$$M_3 + M_4 = I\ddot{\varphi} - D\varphi = 0$$

und somit

$$\ddot{\varphi} - \frac{D}{I}\varphi = 0$$

wobei $\omega^2 = \frac{D}{I}$ gilt . Damit folgt für die Winkelrichtgröße der Spiralfeder

$$D = \omega^2 I$$

Da für ω auch gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$ folgt für die Winkelrichtgröße schließlich

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} I$$

Dabei bestimmt man das Trägheitmoment der jeweiligen Messanordnung des Systems Metallstange-Gewichte aus den Massen und den Abmessungen der Metallstange und der Metallgewichte. Das Trägheitsmoment des Gesamtsystems setzt sich aus dem konstanten Trägheitsmoment der dünnen Metallstange und den veränderlichen Trägheitsmomenten der Metallgewichte zusammen. Die dünne Metallstange besitzt das bereits im Kapitel Theoretische Grundlagen berechnete Trägheitsmoment

$$I = \frac{1}{12} M l^2$$

wobei M die Masse der Stange und l die Länge der Stange darstellt. Die Trägheitsmomente der Metallgewichte lassen sich wie ebenfalls bereits im Kapitel Theoretische Grundlagen bestimmt mit dem Satz von Steiner bestimmen

$$\begin{aligned} I &= I_s + ma^2 \\ &= \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2) + Ma^2 \end{aligned}$$

wobei h die Länge des jeweiligen Metallgewichts und a den Abstand des Schwerpunkts des jeweiligen Gewichts zur Drehachse beschreibt.

2.2 Bestimmung von Hauptträgheitsmomente

Mit Hilfe der oben bestimmten Winkelrichtgröße der Spiralfeder lassen sich die Trägheitsmomente einer flachen Metallscheibe, einer Holzkugel und einer Holzscheibe, die nun nacheinander am Stab befestigt werden, wie folgt über die jeweilige Schwingungsdauer des Systems messen:

$$I = \frac{T^2}{4\pi^2}D$$

Dabei werden die Metallscheibe, die Holzkugel und die Holzscheibe so am Stab befestigt, dass die Drehachse, bezüglich der das Trägheitsmoment bestimmt werden soll, durch den Schwerpunkt der Objekte geht. Von der dünnen Metallscheibe werden jedoch zusätzlich vier weitere exzentrische Aufnahmen gemacht. Die Trägheitsmomente dieser Probekörper lassen sich auch wie bereits im Kapitel Theoretische Grundlagen gezeigt berechnen. Das Trägheitsmoment der dünnen Metallscheibe berechnet sich mit

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

wobei M die Masse der Scheibe, also $\pi R^2 h\rho$ ist, das Trägheitsmoment dieser Scheibe bzgl. der vier weiteren exzentrischen Aufnahmen bestimmt man mit dem Satz von Steiner über

$$\begin{aligned} I &= I_s + ma^2 \\ &= \frac{1}{2}MR^2 + Ma^2 \end{aligned}$$

mit dem Abstand a des Schwerpunkts der Scheibe von der Drehachse. Das Trägheitsmoment der Holzkugel berechnet sich wie folgt

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

und das der Holzscheibe mit

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

wobei M die Masse der Scheibe, also $\pi R^2 h \rho$ ist.

2.3 Kreisel

Um das Trägheitsmoment eines Kreisels zu bestimmen mißt man sowohl seine Präzessionsdauer T_p als auch seine Umlaufdauer T und bestimmt damit über die Gleichung $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Präzessionsfrequenz ω_p sowie die Umlauffrequenz ω des Kreisels und damit wie bereits im Kapitel Theoretische Grundlagen hergeleitet mit Hilfe der Gleichung

$$I = \frac{mgl}{\omega_p \omega}$$

das Trägheitsmoment des Kreisels.

3 Versuchsauswertung

3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D

3.1.1 Statische Methode

Numerische Auswertung
Auswerteformel:

$$D = \frac{mgr}{\varphi}$$
$$\Delta D = \left|\frac{\partial D}{\partial m}\Delta m\right| + \left|\frac{\partial D}{\partial r}\Delta r\right| + \left|\frac{\partial D}{\partial \varphi}\Delta\varphi\right|$$

mit $g = 9,81 N/Kg$ und den Fehlern:

$$\Delta m = 0,05g$$
$$\Delta r = 0,05mm$$
$$\Delta\varphi = 0,00874rad$$

m [g]	φ $[rad]$	D $[10^{-2}\frac{Nm}{rad}]$	ΔD $[10^{-3}\frac{Nm}{rad}]$
10	0,113	2,858	2,384
15	0,209	2,322	1,083
20	0,244	2,654	1,054
30	0,375	2,592	0,788
40	0,471	2,752	0,584
50	0,593	2,732	0,469
60	0,803	2,423	0,321
70	0,943	2,408	0,265
90	1,152	2,533	0,246
100	1,222	2,654	0,241

Mittelwerte:

$$\overline{D} = 2,593 \cdot 10^{-2}\frac{Nm}{rad}$$
$$\overline{\Delta D} = 0,744 \cdot 10^{-3}\frac{Nm}{rad}$$

Graphische Auswertung

Stellt man die Gleichung um, so erhält man aus der Gleichung $D = \frac{mgr}{\varphi}$ die Geradengleichung:

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= \frac{gr}{D} m \\ \text{Mit der Steigung} \qquad m_m &= \frac{gr}{D} \end{aligned}$$

Daraus erhält man für die Winkelrichtgröße D:

$$D = \frac{gr}{m_m}$$

Mit Hilfe der linearen Regression (→ Anhang) erhält man für die Geradensteigung $m_m = 12,703 \frac{rad}{kg}$. Daraus ergibt sich:

$$\text{D=0,255}\cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$$

Eine Auswertung des Fehlers ist hier nicht möglich, da durch die hohe Streuung der Messpunkte gegenüber den sehr kleinen Fehlern, die graphisch als Fehlerbalken nicht mehr einzuzeichnen sind, nicht ermittelt werden konnte.

3.1.2 Dynamische Methode

Für das Trägheitsmoment eines Vollzylinders gilt:

$$I = m\left(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{12}l^2\right)$$

Mit dem Satz von Steiner $I = I_S + ma^2$ läßt sich nun das Trägheitsmoment der gesamten Anordnung, bestehend aus dem Trägheitsmoment der Stange I_S und der beiden Massenstücke I_{M1} und I_{M2} berechnen.

$$\begin{aligned} I_S &= m_S\left(\frac{1}{4}r_S^2 + \frac{1}{12}l_S^2\right) \\ I_{M1} &= m_{M1}\left(\frac{1}{4}r_{M1}^2 + \frac{1}{12}l_{M1}^2\right) + m_{M1}a^2 \\ I_{M2} &= m_{M2}\left(\frac{1}{4}r_{M2}^2 + \frac{1}{12}l_{M2}^2\right) + m_{M2}a^2 \end{aligned}$$

Für das Gesamtträgheitsmoment und dessen Fehler gilt:

$$\begin{aligned} I &= I_S + I_{M1} + I_{M2} \\ \Delta I &= \left|\frac{\partial I}{\partial m_S}\Delta m_S\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial r_S}\Delta r_S\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial l_S}\Delta l_S\right| \\ &\quad + \left|\frac{\partial I}{\partial m_{M1}}\Delta m_{M1}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial r_{M1}}\Delta r_{M1}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial l_{M1}}\Delta l_{M1}\right| \\ &\quad + \left|\frac{\partial I}{\partial m_{M2}}\Delta m_{M2}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial r_{M2}}\Delta r_{M2}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial l_{M2}}\Delta l_{M2}\right| \end{aligned}$$

Für die Winkelrichtgröße G gilt:

$$\begin{aligned} D &= 4\pi^2 \frac{I}{T^2} \\ \Delta D &= \left|\frac{\partial D}{\partial I}\Delta I\right| + \left|\frac{\partial D}{\partial T}\Delta T\right| \end{aligned}$$

a [cm]	I [gm^2]	ΔI [gm^2]	D [$10^{-2}\frac{Nm}{rad}$]	ΔD [$10^{-3}\frac{Nm}{rad}$]
0,284	43,84	0,1499	2,704	0,160
0,234	31,08	0,1228	2,720	0,188
0,184	20,78	0,0962	2,722	0,225
0,159	16,56	0,0831	2,709	0,246
0,134	12,95	0,0701	2,676	0,267
0,084	7,583	0,0444	2,627	0,308

Mittelwert:

$$\begin{aligned} \overline{D} &= 2,693 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad} \\ \overline{\Delta D} &= 0,232 \cdot 10^{-3} \frac{Nm}{rad} \end{aligned}$$

Graphische Auswertung

Durch umstellen der Gleichung $D = 4\pi^2 \frac{I}{T^2}$ erhält man die Geradengleichung:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} I$$

$$\begin{aligned} \text{mit der Steigung} \qquad m_m &= \frac{4\pi^2}{D} \\ \Rightarrow D &= \frac{4\pi^2}{m_m} \end{aligned}$$

Durch lineare Regression der $T^2 - I$-Diagramm ($\rightarrow$ Anhang) erhält man für die Steigung $m_m = 1,450 \frac{s^2}{gm^2}$. Daraus ergibt sich für die Winkelrichtgröße $D = 2,723 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$. Der Fehler konnte hier nicht ermittelt werden, da die Fehler der einzelnen Messgrößen zu klein sind, um sie graphisch erfassen zu können.

3.2 Bestimmung der Hauptträgheitsmomente

Als Winkelrichtgröße wird der Durchschnitt der vorangegangen Versuche benutzt. Damit ist $D = 2,670 \cdot 10^{-2} \frac{Nm}{rad}$ und $\Delta D = 0,488 \cdot 10^{-3} \frac{Nm}{rad}$.

3.2.1 Berechnung der Hauptträgheitsmomente

Kugel:

$$\begin{aligned} I_K &= \frac{2}{5} m r^2 = 1,649 gm^2 \\ \Delta I_K &= \left| \frac{\partial I}{\partial m} \Delta m \right| + \left| \frac{\partial I}{\partial r} \Delta r \right| = 0,925 \cdot 10^{-4} gm^2 \end{aligned}$$

Scheibe:

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{1}{2} m r^2 = 1,872 gm^2 \\ \Delta I_S &= \left| \frac{\partial I}{\partial m} \Delta m \right| + \left| \frac{\partial I}{\partial r} \Delta r \right| = 1,697 \cdot 10^{-2} gm^2 \end{aligned}$$

3.2.2 Messung der Hauptträgheitsmomente

Auswerteformel:

$$\begin{aligned} I &= \frac{T^2 D}{4\pi^2} \\ \Delta I &= \left| \frac{\partial I}{\partial T} \Delta T \right| + \left| \frac{\partial I}{\partial D} \Delta D \right| \end{aligned}$$

Kugel:

$$I = 1,561 gm^2 \qquad \Delta I = 0,0491 gm^2$$

Scheibe:

$$I = 1,670 gm^2 \qquad \Delta I = 0,0518 gm^2$$

3.3 Satz von Steiner

Berechnung des Trägheitsmoments I_1:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} m r^2 + m a^2 \\ \Delta I_1 &= \left|\frac{\partial I_1}{\partial m}\Delta m\right| + \left|\frac{\partial I_1}{\partial r}\Delta r\right| + \left|\frac{\partial I_1}{\partial a}\Delta a\right| \end{aligned}$$

Messung des Trägheitsmoments I_2:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{T^2 D}{4\pi^2} \\ \Delta I &= \left|\frac{\partial I_2}{\partial T}\Delta T\right| + \left|\frac{\partial I_2}{\partial D}\Delta D\right| \end{aligned}$$

a [cm]	I_1 $[gm^2]$	ΔI_1 $[gm^2]$	I_2 $[\Delta I_2]$	Abweichung $\frac{\lvert I_1 - I_2\rvert}{I_1}$ [%]	
0	14,01	0,071	14,14	0,320	0,93
4	15,14	0,099	15,16	0,341	0,13
8,1	18,61	0,128	18,47	0,408	0,75
12,2	24,44	0,157	23,95	0,518	2,00
16,1	32,18	0,185	28,42	0,607	11,7

3.4 Kreisel

Auswerteformel:

$$\begin{aligned} I &= \frac{mgl}{\omega_p \omega} = \frac{mgl}{4\pi^2} T_p T \\ \Delta I &= \left|\frac{\partial I}{\partial m}\Delta m\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial l}\Delta l\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial T_p}\Delta T_p\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial T}\Delta T\right| \end{aligned}$$

Fehler:

$$\begin{aligned} \Delta m &= 0,05g \\ \Delta l &= 1,27mm \\ \Delta T_p &= \Delta T = 0,5ms \end{aligned}$$

Abstand [cm]	T_p [s]	I [gm^2]	ΔI [gm^2]
7,62	62,48	27,50	0,569
10,16	28,94	16,99	0,281
11,43	22,89	15,11	0,229
12,70	18,92	13,87	0,195
15,24	13,95	12,28	0,152

4 Fehlerdiskussion

4.1 Statische Methode

Bei der Versuchsdurchführung ist die Achse nach der Auslenkung nicht selbständig in den Nullpunkt zurückgekehrt. Der Nullpunkt mußte stets nachgestellt werden. Damit wurde erheblichen Einfluß auf die Ergebnisse genommen.

4.2 Dynamische Methode

Die Zeit der Schwingungsdauer ist bei dieser Methode manuell gestoppt worden. Trotz der Messung von 10 Perioden ist dieser Fehler im Vergleich zu den anderen Messfehlern der Größte. Reibung und andere Einflüß dürfen aufgrund deren kleiner Auswirkung vernachlässigt werden.

4.3 Hauptträgheitsmomente

Ein Problem stellte hier die Messung der Maße der benutzten Körper dar. Aufgrund ihrer Größe und ihrer Form waren diese nicht immer exakt zu ermitteln, da ein Meßlatte nicht immer an ihnen plan angelegt werden konnte. Auch hier wurde die Periodenzeit wieder manuell gestoppt.

4.4 Steiner

Bei diesem Versuch wurde eine Metallscheibe benutzt, die an verschiedenen Punkte auf der Drillachse befestigt wurde. Je weiter dieser Aufhängepunkt vom Schwerpunkt entfernt war, desto größer wurde das Drehmoment auf die Achse. Trotz guter Befestigung konnte aber eine kleine Neigung der Scheibe nicht vermieden werden, was zum taumeln der Scheibe während der Versuchsdurchführung führte. Ebenfalls wurde die Periodenzeit manuell gestoppt.

4.5 Kreisel

Bei dem Kreisel mußte anfangs der Abstand des Gewichts auf der Drehachse so eingestellt werden, daß auf die rotierende Scheibe kein Drehmoment wirkt. Dies Einstellung erfolgte jedoch sehr ungenau. Da dieser Gleichgewichtspunkt als Referenzwert der anderen Messungen gilt und die Skala sehr grob eingeteilt war, kam diese große Abweichung in der Auswertung der einzelnen Messergebnisse zustande.

Literatur

[1] W. Walcher. *Praktikum der Physik.* Teubner Studienbücher Physik, 1994.

[2] Bergmann, Schäfer. *Lehrbuch der Experimentalphysik - Mechanik, Relativität, Wärme - Band 1.* Walter de Gruyter, 11. Auflage

[3] Christian Gerthsen. *Physik.* Springer - Lehrbuch, 1993

[4] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik.* Fachbuchverlag Leipzig 1996, 16. Auflage

[5] H. Breuer. *DTV - Atlas zur Physik Band 1, Band 2* Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG. München 1994, 4. Auflage