

Versuch Nr. 4

Drillachse

Andreas Josef Birnesser

Andreas.Birnesser@wirtschaftsphysik.de

Sascha Wagner

Sascha.Wagner@wirtschaftsphysik.de

06. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

1. Theoretische Grundlagen.....	5
1.1. Statik des starren Körpers	5
1.1.1. Begriff des starren Körpers	5
1.1.2. Massenmittelpunkt und Schwerpunkt	5
1.2. Dynamik des starren Körpers.....	6
1.2.1. Die Rotationsbewegung	6
1.2.2. Das Drehmoment	6
1.2.3. Energie der Drehbewegung.....	6
1.2.4. Trägheitsmoment.....	7
1.2.5. Berechnung von Trägheitsmomenten.....	8
1.2.6. Der Satz von Steiner	8
1.2.7. Kräfte und Drehmomente auf starre Körper	9
1.3. Der Drehimpuls.....	10
1.3.1. Definition des Drehimpulses	10
1.3.2. Drehimpulserhaltung.....	11
1.4. Drehschwingung	11
1.5. Auswirkungen auf Molekularer Ebene	11
1.6. Kreisel.....	12
1.6.1. Der kräftefreie Kreisel.....	12
1.6.2. Präzession.....	13
1.6.3. Nutation.....	13
2. Versuchsbeschreibung	14
2.1. Bestimmen der Winkelrichtgröße	14
2.1.1. Statische Methode	15
2.1.2. Dynamische Methode.....	15
2.2. Überprüfung des Steinerschen Satzes.....	16
2.3. Trägheitsmomente.....	16
2.4. Kreisel.....	17

3. Versuchsauswertung.....	18
3.1. Bestimmen der Winkelrichtgröße	18
3.1.1. Statische Methode	18
3.1.2. Dynamische Methode.....	20
3.2. Steinerscher Satz.....	23
3.3. Trägheitsmomente.....	24
3.4. Kreisel.....	26
4. Fehlerdiskussion.....	28
4.1. Statische Methode	28
4.2. Dynamische Methode	28
4.3. Steinerscher Satz.....	28
4.4. Trägheitsmoment	29
4.5. Kreisel.....	29

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Trägheitsmoment eines Quaders.....	8
Abbildung 2: Präzession eines Kreisels.....	13
Abbildung 3: Drehpendel.....	14
Abbildung 4: Statische Methode.....	15
Abbildung 5: Satz von Steiner.....	16
Abbildung 6: Trägheitsmomente.....	16
Abbildung 7: Kreisel.....	17
Abbildung 8: Graphische Bestimmung der Winkelrichtgröße.....	19
Abbildung 9: Proportionalität T^2 und I	22
Abbildung 10: Drehmoment-Präzessionsfrequenz-Diagramm.....	27

1. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

1.1. Statik des starren Körpers

1.1.1. Begriff des starren Körpers

Zur Einführung translatorischer Bewegungen und deren Gleichungen greift man gewöhnlicherweise auf das Modell des Massenpunktes zurück. Ein Massenpunkt ist eine Idealisierung eines Körpers als mathematischer Punkt mit verschwindender Ausdehnung, aber endlicher Masse. Bei der Untersuchung der Dynamik von ausgedehnten Systemen reicht dieses Modell nicht mehr aus. Man definiert den starren Körper, als einen Körper, dessen materielle Bestandteile immer die gleichen Abstände voneinander beibehalten, also starr miteinander verbunden sind. Er ist dadurch ausgezeichnet, dass er unter dem Einfluss einer äußeren Kraft sein Volumen und seine Form nicht ändert. Die Atome halten in einem körperfesten Bezugssystem ihre Position stets bei. Man kann sich also vorstellen, dass der starre Körper aus vielen Massenpunkte zusammengesetzt ist, für deren Abstände gilt:

$$|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)| = \text{const.} \quad (1)$$

Die Lage des gesamten starren Körpers ist deshalb durch einen einzigen Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ beschreibbar.

1.1.2. Massenmittelpunkt und Schwerpunkt

Will man für einfache Betrachtungen einen Körper auf einen Massenpunkt reduzieren, so nimmt man den Massenmittelpunkt, welcher das gewichtete Mittel aller Massenelemente des Körpers ist.

Für ein Kontinuum erhält man folgendes Integral:

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{m_{ges}} \int \mathbf{r} \cdot dm. \quad (2)$$

Hierbei ist dm ein Massenelement am Ort \mathbf{r} , m_{ges} die Masse des Körpers und \mathbf{r}_s der Ort des Massenmittelpunktes.

Befindet sich der Körper in einem homogenen Gravitationsfeld, so ist der Massenmittelpunkt mit dem Schwerpunkt identisch. Ist das Gravitationsfeld jedoch inhomogen (z.B.: bei einem ausgedehnten Körper, so dass eine unterschiedliche Gravitation wirkt), so sind Schwerpunkt und Massenmittelpunkt nicht identisch. Der Schwerpunkt ist dann der Punkt, an dem dieser Körper unterstützt werden muss, damit er sich im Kräftegleichgewicht befindet. In der Nähe der Erdoberfläche ist dies in guter Näherung immer der Massenmittelpunkt.

1.2. Dynamik des starren Körpers

1.2.1. Die Rotationsbewegung

Die Rotationsbewegung des starren Körpers ist dadurch gekennzeichnet, dass während der Bewegung die Abstände untereinander und zur festen Drehachse über die gesamte Dauer konstant bleiben. Die Rotation wird durch folgende drei Größen beschrieben:

- Der **Drehwinkel** $j(t)$ gibt die Lage des starren Körpers zu jedem Zeitpunkt t an.
- Die **Winkelgeschwindigkeit** \mathbf{w} ist ein Vektor längs der Drehachse, dessen Betrag die Änderung des Drehwinkels pro Zeiteinheit angibt. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors charakterisiert dabei die Drehrichtung:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} \quad (3)$$

Der Zusammenhang zwischen Tangential- und Winkelgeschwindigkeit ergibt sich zu:

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{r \cdot dj}{dt} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \quad (5)$$

$$\vec{v} = \mathbf{w} \times \vec{r} \quad (6)$$

- Die **Winkelbeschleunigung** \mathbf{a} , ist die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \dot{\mathbf{w}} = \frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} = \mathbf{j} \quad (4)$$

1.2.2. Das Drehmoment

Eine an einem starren Körper angreifende Kraft kann den Körper in Rotation versetzen. Wenn die Wirkungslinie der Kraft jedoch durch den Schwerpunkt geht, bewirkt sie keine Drehung. Das Kreuzprodukt aus Hebelarm \mathbf{r} (senkrechter Abstand zwischen Wirkungslinie und Drehachse) und Kraft \mathbf{F} heißt **Drehmoment**:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (7)$$

Der Drehmomentvektor steht senkrecht auf dem Hebelarm und der Kraft und charakterisiert den Drehsinn. Bei einer Umkehrung der Kraftwirkung oder der Richtung des Vektors \mathbf{r} ändert sich auch die Drehrichtung. Der Betrag ist gegeben durch:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \mathbf{b} \quad (8)$$

wobei \mathbf{b} der Winkel zwischen \mathbf{F} und \mathbf{r} ist.

1.2.3. Energie der Drehbewegung

Ein starrer Körper rotiere ohne Translationsbewegung um eine Achse. Ein Massenelement m_i mit dem senkrechten Abstand r_i von der Achse habe die Geschwindigkeit $v_i = \mathbf{w} \cdot r_i$. Die kinetische Energie des Massenelementes beträgt demnach $\frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2$. Für die **Gesamtrotationsenergie** gilt:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \sum_i m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{w}^2 \cdot \sum_i m_i \cdot r_i^2 \quad (9)$$

Für einen kontinuierlichen Körper gilt:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \int \mathbf{r} \cdot r^2 \cdot dV \quad (10)$$

1.2.4. Trägheitsmoment

Wir untersuchen zunächst den Ausdruck aus Gleichung (9):

$$I = m_i \cdot r_i^2 \quad (11)$$

Diese Gleichung wird als **Trägheitsmoment** eines Massenpunktes bezeichnet. Je weiter die einzelnen Masseteilchen von der Drehachse entfernt sind, um so mehr wirken sie sich auf die Rotation aus.

Die Trägheitsmomente aller Massenpunkte eines Körpers bezüglich einer gegebenen Drehachse addieren sich. Für eine Drehung um die Achsen ergibt sich das Trägheitsmoment eines Körpers zu:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_i r_x^2 \cdot m_i = \sum_i (y^2 + z^2) \cdot m_i \\ I_y &= \sum_i r_y^2 \cdot m_i = \sum_i (x^2 + z^2) \cdot m_i \\ I_z &= \sum_i r_z^2 \cdot m_i = \sum_i (x^2 + y^2) \cdot m_i \end{aligned} \quad (12)$$

Das Trägheitsmoment ist also ein Maß für den Widerstand, den der Körper einer Änderung seiner Drehbewegung entgegensetzt. Das translatorische Analogon ist die Masse.

Für eine kontinuierliche Massenverteilung ergibt sich für das Trägheitsmoment:

$$I = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \cdot \rho \cdot dV \quad (13)$$

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers ist ein Skalar, wenn die Drehachse während der gesamten Rotation konstant bleibt. Ändert sich diese Drehachse mit der Zeit, reicht diese skalare Größe nicht mehr aus und man kann das Trägheitsmoment nur mit Hilfe eines Tensors zweiter Stufe, dem sogenannten **Trägheitstensor** beschreiben. Er hat im Allgemeinen folgende Gestalt:

$$\vec{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (14)$$

I_{xx} , I_{yy} und I_{zz} stimmen mit den Gleichungen (12) überein. Die Diagonalelemente werden als Hauptträgheitselemente bezeichnet.

Dreht sich ein Körper um eine seiner Hauptträgheitsachsen, so ist die Rotation stabil. Die Nicht – Diagonalelemente sind die Deviationsmomente:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -\sum_i x \cdot y \cdot m_i \\ I_{xz} &= I_{zx} = -\sum_i x \cdot z \cdot m_i \\ I_{yz} &= I_{zy} = -\sum_i y \cdot z \cdot m_i \end{aligned} \quad (15)$$

Da der Trägheitstensor symmetrisch ist, lässt er sich diagonalisieren. Nach dieser Transformation hat er folgende Gestalt:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (16)$$

Trägheitsmomente zusammengesetzter Körper, die sich um die gleiche Achse drehen, können addiert werden.

Die Hauptträgheitsmomente sind jedoch nicht völlig voneinander unabhängig. Aus Gleichung (12) folgt, dass für einen Körper, der in z-Richtung nahezu keine Ausdehnung hat, das Trägheitsmoment gegeben ist durch:

$$I_z = I_x + I_y \quad (17)$$

1.2.5. Berechnung von Trägheitsmomenten

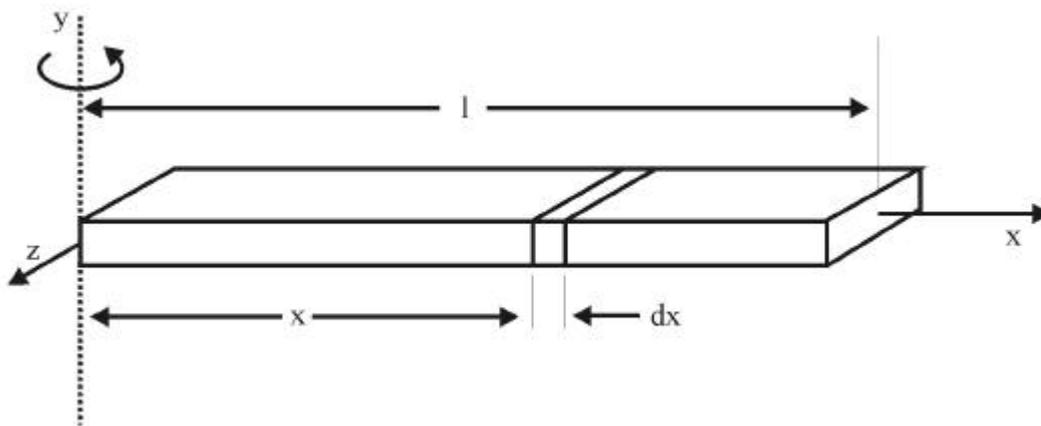


Abbildung 1: Trägheitsmoment eines Quaders

Im folgenden wird das Trägheitsmoment eines Quaders der Länge l mit gleichmäßiger Massenbelegung $I = m_{ges} / l$ um die y-Achse hergeleitet. Für ein Massenelement gilt:

$$\begin{aligned} dm &= I \cdot dx \\ I_y &= \int_0^l x^2 dm = \int_0^l \frac{m_{ges}}{l} \cdot x^2 dx \\ I_y &= \frac{1}{3} \cdot m_{ges} \cdot l^2 \end{aligned}$$

1.2.6. Der Satz von Steiner

Die Berechnung von Trägheitsmomenten kann durch Anwendung des Steinerschen Satzes vereinfacht werden. Er verknüpft das Trägheitsmoment I_S für die Drehung um eine Achse, die durch den Schwerpunkt geht, mit dem Trägheitsmoment einer dazu parallelen, im Abstand h befindlichen Achse. Es gilt:

$$I = I_S + m_{ges} \cdot h^2 \quad (18)$$

Herleitung des Steinerschen Satzes:

Die kinetische Energie der Bewegung des Schwerpunktes und der Bewegung relativ dazu, ergibt die gesamte Rotationsenergie des Körpers. Für die Rotation um den Schwerpunkt gilt:

$$E_{kin,rel} = \frac{1}{2} \cdot I_S \cdot \boldsymbol{w}^2, \quad (19)$$

E_{kin} entspricht der Drehung des Schwerpunkts mit der Geschwindigkeit v_s um die parallele Drehachse:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_s^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \boldsymbol{w}^2 \cdot h^2. \quad (20)$$

Für die Gesamtenergie folgt:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{kin,rel} \quad (21)$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2} \cdot m_{ges} \cdot h^2 \cdot \boldsymbol{w}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_S \cdot \boldsymbol{w}^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_{ges} \cdot h^2 + I_S) \cdot \boldsymbol{w}^2, \quad (22)$$

$$I = I_S + m_{ges} \cdot h^2. \quad (23)$$

1.2.7. Kräfte und Drehmomente auf starre Körper

Man kann zwei Arten von Bewegungen eines starren Körpers unterscheiden:

Translationsbewegung, wenn alle Teilchen des Körpers parallele Bahnen beschreiben, so dass die Linien, die zwei beliebige Punkte des Körpers verbinden, immer parallel zu ihren Anfangspositionen sind.

Rotation um eine Achse, wenn alle Teilchen kreisförmige Bahnen um eine Gerade beschreiben, die man als Rotationsachse bezeichnet. Diese Achse kann fixiert sein, oder ihre Richtung während der Bewegung relativ zum Körper ändern.

Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers kann man immer als Kombination einer Rotations- und einer Translationsbewegung betrachten. Der Grund hierfür ist, dass beliebig viele Kräfte immer in zwei Komponenten aufgeteilt werden können. Zum einen in ein Drehmoment, das auf den Körper wirkt, zum anderen in eine resultierende Kraft, die auf den Schwerpunkt wirkt.

Der starre Körper hat daher sechs Freiheitsgrade, d.h. für eine vollständige Beschreibung seiner Bewegung sind sechs Gleichungen nötig, drei für die räumliche Lage des Schwerpunktes und drei für die Rotation um drei zueinander senkrechte Drehachsen.

1.3. Der Drehimpuls

1.3.1. Definition des Drehimpulses

Bei einem starren Körper gilt für dessen Schwerpunkt nach Newton:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (24)$$

Bei einer Drehbewegung gilt dann für das Drehmoment:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (25)$$

Es folgt durch vektorielle Multiplikation von \mathbf{F} an \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (26)$$

Durch Produktdifferentiation erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (27)$$

Da

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times (m \cdot \mathbf{v}) = m \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (28)$$

erhält man

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (29)$$

In dieser Gleichung steht nun auf der linken Seite die Formel für das Drehmoment und rechts die Ableitung des Terms $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Diesen Term nennt man **Drehimpuls \mathbf{L}** .

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (30)$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist somit gleich dem wirksamen Drehmoment solange diese den gleichen Bezugspunkt haben.

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (31)$$

Der Drehimpuls ist nicht auf Drehbewegungen beschränkt, sondern hat auch für geradlinige Bewegungen seine Gültigkeit. Hat man es mit mehreren Körpern zu tun, so setzt sich der gesamte Drehimpuls aus der Summe der einzelnen Drehimpulse zusammen. So lässt sich der Gesamtdrehimpuls grundsätzlich in zwei Komponenten aufspalten:

- Den Eigendrehimpuls L_e , der unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist und die Orientierung eines Körpers im Raum ändert.
- Den Bahndrehimpuls L_b , der von der Wahl des Bezugspunktes abhängig ist und die Orientierung eines Körpers im Raum nicht ändert.

$$\mathbf{L}_{\text{ges}} = \mathbf{L}_e + \mathbf{L}_b \quad (32)$$

1.3.2. Drehimpulserhaltung

Wirkt in auf ein System kein äußeres Drehmoment, so verschwindet die Zeitableitung des gesamten Drehimpulses, d.h. die Summe aus Eigendrehimpuls und des Bahndrehimpulses ist zeitlich konstant.

$$\mathbf{L}_{\text{ges}} = \mathbf{L}_e + \mathbf{L}_b = \text{const.} \quad (33)$$

Der Drehimpulserhaltungssatz ist eines der physikalischen Grundgesetze. Er besagt, dass wenn auf einen Körper kein äußeres Drehmoment wirkt, dies ein abgeschlossenes System bezüglich des Drehmomentes ist und damit der Gesamtdrehimpuls im Innern des Systems konstant bleibt. Es dürfen sehr wohl äußere Kräfte auf den Schwerpunkt wirken, da diese kein Drehmoment erzeugen. Zudem können innerhalb des Systems Drehmomente vorhanden sein, die aber keinen Einfluss auf den Drehimpuls des Systems haben. Der Drehimpulserhaltungssatz ist unabhängig vom Energieerhaltungssatz und der Drehimpuls hat im Gegensatz zu diesem vektoriellen Charakter.

1.4. Drehschwingung

Für das rücktreibende Drehmoment im Bereich des Hookeschen Gesetzes gilt:

$$M = -k_D \cdot \mathbf{j} \quad (34)$$

Mit Hilfe des Drehmomentsatzes lässt sich die Drehbewegung eines starren Körpers um eine feste Achse beschreiben als:

$$M = I \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt} = I \cdot \frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} = I \cdot \mathbf{j} \quad (35)$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite erscheint hier, weil der rechte Term das rücktreibende Drehmoment beschreibt. Der Ausdruck in Gleichung (35) kann als Differentialgleichung für eine harmonische Schwingung verstanden werden. Es gilt:

$$I \cdot \mathbf{j} + k_D \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (36)$$

$$\mathbf{j}(t) = \mathbf{j}_{\text{max}} \cdot \sin(\mathbf{w}_0 \cdot t + \mathbf{j}_0) \quad (37)$$

Daraus lässt sich die Periodendauer der harmonischen Schwingung bestimmen:

$$T = \frac{2 \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{w}} = 2 \cdot \mathbf{p} \cdot \sqrt{\frac{I}{k_D}} \quad (38)$$

1.5. Auswirkungen auf Molekularer Ebene

Die Änderung der Rotationsenergie eines Atoms oder Moleküls kann durch Absorption oder Emission elektromagnetischer Strahlung recht einfach gemessen werden. Mit dieser kann man dann die Änderung der Winkelgeschwindigkeit oder des Drehmomentes bestimmen. Hieraus kann man wiederum Rückschlüsse auf die Massenverteilung oder die Abstände von Atomen in Molekülen ziehen.

Einstein und Haas versuchten als erste, den Eigendrehimpuls der Elektronen von Eisenatomen experimentell zu messen. Dies gelang dann 1915 Samuel Barnett zum ersten mal mit einer genauen Messung. Der Eigendrehimpuls ist nicht mit der makroskopischen Rotation einer Masse um eine Achse durch ihren Schwerpunkt erklärbar. Deshalb wird der Drehimpuls von Elementarteilchen **Spin** genannt. Er hat die Größe $\hbar/(4\mathbf{p}) = 0,527 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, wobei \hbar die Planck-Konstante ist. Er kann zudem nur in ganz bestimmte Richtungen zeigen.

1.6. Kreisel

Physikalische Kreisel sind starre rotierende Körper mit mindestens einem raumfesten Punkt, bezüglich eines Koordinatensystems, das nicht Schwerpunktsystem ist. Das Bewegungsproblem des physikalischen Kreisels konnte in voller Allgemeinheit noch nicht gelöst werden, allerdings existieren für praktisch wichtige Spezialfälle Näherungslösungen. Dreht sich ein Kreisel um eine seiner Hauptträgheitsachsen, ist seine Bewegung stabil und sowohl der Drehimpuls \mathbf{L} , als auch die Winkelgeschwindigkeit \mathbf{w} konstant. In allen anderen bleibt nur der Drehimpulsvektor konstant und die Bewegung wird durch den Trägheitstensor bestimmt. Bei Kreiseln unterscheidet man schwere Kreisel, die in einem homogenen Kraftfeld rotieren und kräftefreie Kreisel, auf die wir im folgenden Abschnitt genauer eingehen werden.

1.6.1. Der kräftefreie Kreisel

Unter einem kräftefreien Kreisel versteht man einen rotierenden Körper, auf den kein äußeres Drehmoment einwirkt. Dies tritt beispielsweise bei rotierenden Körpern im Welt- raum, oder bei im Schwerpunkt unterstützten Kreiseln auf .

Da der kräftefreie Kreisel in sich ein abgeschlossenes System bezüglich Energie und Drehmoment darstellt, gilt sowohl der Energieerhaltungssatz:

$$E = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \mathbf{w}^2 = \frac{1}{2} \cdot I_x \cdot \mathbf{w}_x^2 + \frac{1}{2} \cdot I_y \cdot \mathbf{w}_y^2 + \frac{1}{2} \cdot I_z \cdot \mathbf{w}_z^2 = const., \quad (39)$$

als auch der Drehimpulserhaltungssatz:

$$L^2 = I_x^2 \cdot \mathbf{w}_x^2 + I_y^2 \cdot \mathbf{w}_y^2 + I_z^2 \cdot \mathbf{w}_z^2 = const. \quad (40)$$

Es gilt $\vec{L} = I \cdot \mathbf{w}$ für die Hauptträgheitsachsen auch komponentenweise, ansonsten nicht, da $\vec{\mathbf{I}}$ ein Tensor ist. Die Gleichungen (39) und (40) lassen sich daher umformen:

$$\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z} = 2 \cdot E \quad (41)$$

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 \quad (42)$$

In einem Koordinatensystem mit den Achsen L_x , L_y und L_z , die in die Richtung der Hauptträgheitsachsen zeigen, beschreibt Gleichung (41) geometrisch gesehen die Oberfläche eines Ellipsoids und Gleichung (42) die Oberfläche einer Kugel.

Der Körper muss beide Gleichungen erfüllen, d.h. die tatsächliche Bewegungskurve ist die Schnittkurve von Kugel und Ellipsoid. Das bedeutet, dass der Kugelradius nicht kleiner sein darf als die kleinste Halbachse des Ellipsoids und nicht größer als die Größte, da die beiden Gleichungen sonst keine gemeinsame Lösung haben.

1.6.2. Präzession des schweren Kreisels

Die Bewegung der Rotationsachse eines Kreisels um eine feste Achse als Folge eines äußeren Drehmoments bezeichnet man als Präzession.

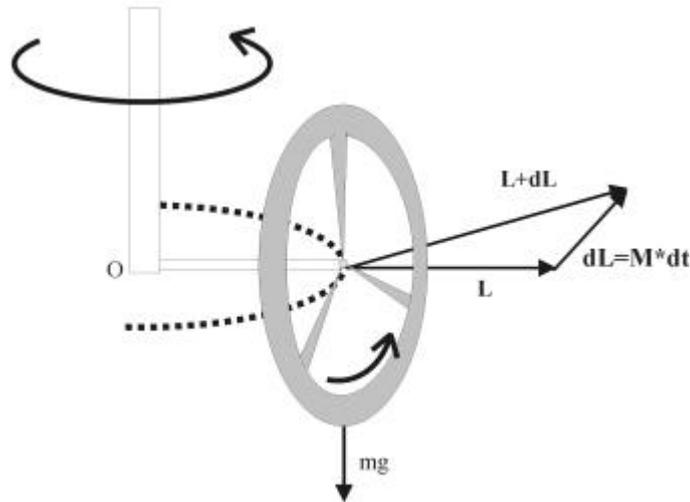


Abbildung 2: Präzession eines Kreisels

Ein Rad, welches an einer festgehaltenen horizontalen Drehachse befestigt ist, wird in Rotation versetzt. Die Radachse wird losgelassen und es wirkt die Gewichtskraft $F = m \cdot g$ in erster Näherung (die Masse der Drehachse sei vernachlässigbar) auf den Schwerpunkt des Rades. Das Drehmoment bezüglich des Punktes O bewirkt eine Änderung des Drehimpulses in Richtung des Drehmomentes.

Der Kreisel, der sich mit dem Anfangsdrehimpuls \mathbf{L} um die gelagerte Achse dreht, erfährt demzufolge eine Änderung des Drehimpulses $d\mathbf{L}$ senkrecht zu \mathbf{L} . Er bewegt sich schließlich in Richtung des Drehmoments. Diese Bewegung wird als Präzession bezeichnet. Die Präzessionsgeschwindigkeit kann folgendermaßen hergeleitet werden:

$$dL = M \cdot dt = m \cdot g \cdot R \cdot dt \quad (43)$$

für den Winkel $d\mathbf{j}$, um den sich die Radachse bewegt, gilt:

$$d\mathbf{j} = \frac{dL}{L} = \frac{m \cdot g \cdot R}{L} \cdot dt. \quad (44)$$

Für die Winkelgeschwindigkeit der Präzession gilt:

$$\omega_p = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{m \cdot g \cdot R}{L}. \quad (45)$$

1.6.3. Nutation

Betrachten wir den Beginn der Präzession etwas genauer als in 1.6.2., so stellt man fest, dass der Schwerpunkt des Reifens nicht genau auf der Höhe bleibt, auf der er zuerst losgelassen wurde. Er vollführt vielmehr eine zyklische Bewegung, welche Nutation genannt wird. Dabei rotiert der Körper um seinen Schwerpunkt.

2. VERSUCHSBESCHREIBUNG

2.1. Bestimmen der Winkelrichtgröße

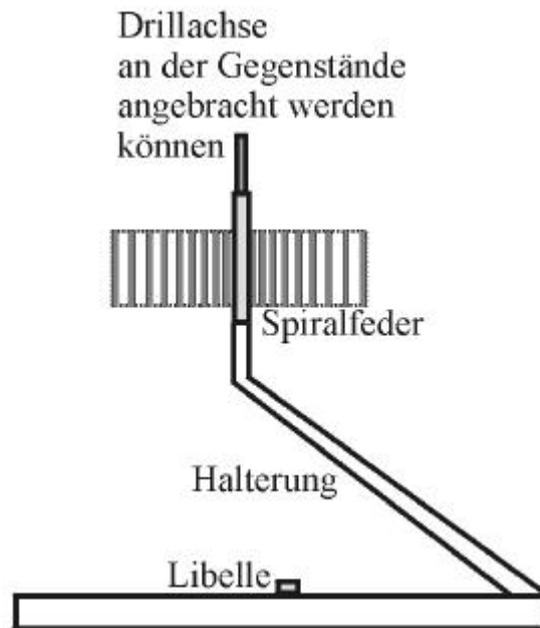


Abbildung 3: Drehpendel

Auf einer Halterung, welche in der waagerechten durch eine Libelle ausgeglichen werden kann, ist eine Spiralfeder angebracht. Die Spiralfeder erzeugt ein Rückstelldrehmoment, das durch Biegung erzeugt wird. Dabei ist das Drehmoment im Hooke'schen Bereich proportional zum Auslenkwinkel aus der Ruhelage und ihm entgegengerichtet. Die Größe k_D wird als Winkelrichtgröße bezeichnet und kann auf formalem Weg durch die Abmessungen der Feder berechnet werden. Es gilt:

$$M = -k_D \cdot j$$

Im ersten Teil des Versuchs liegt der Schwerpunkt darauf, die Winkelrichtgröße mit Hilfe verschiedener Meßmethoden zu bestimmen.

2.1.1. Statische Methode

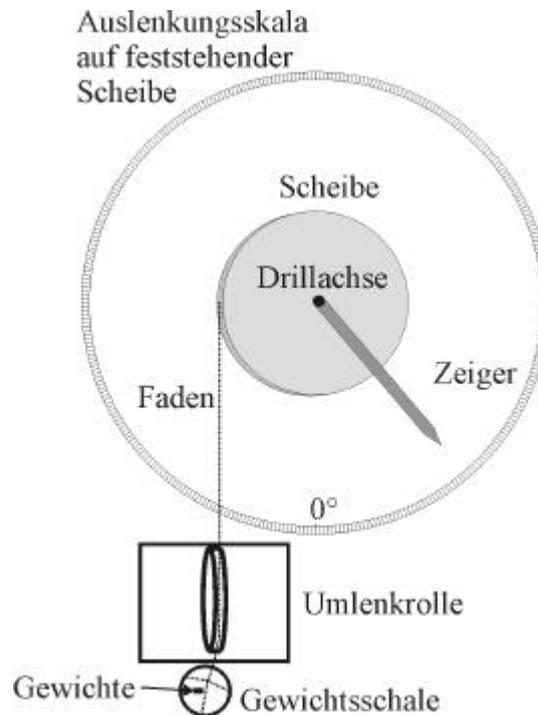


Abbildung 4: Statische Methode

Auf der Drillachse wird nun eine feststehende Scheibe zur Winkelmessung befestigt. Über eine Umlenkrolle, an der eine Gewichtsschale befestigt ist, kann die Spiralfeder belastet werden. Die Nullstellung wird so gewählt, dass das Gewicht der Gewichtsschale kompensiert wird. Man belastet die Gewichtsschale nun aufsteigend mit Gewichten und ließt den Drehwinkel ab. Auf diese Weise kann die Winkelrichtgröße bestimmt werden:

$$k_D = \frac{m \cdot g \cdot r}{j}$$

2.1.2. Dynamische Methode

Ein Stab der Länge L wird nachdem alle Abmessungen bestimmt wurden mittig auf die Drillachse montiert. An dem Stab werden auf beiden Seiten Hohlzylinder angebracht. Der Abstand zwischen Hohlzylinder und Drillachse kann variiert werden. Lenkt man die Stange nun aus, so vollführt das System harmonische Schwingungen. Es gilt folgende Differentialgleichung für die Schwingung:

$$I \cdot \ddot{j} + k_D j = 0$$

Daraus folgt für die Periodendauer T :

$$T = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I}{k_D}}$$

Man misst mit sechs verschiedenen Einstellungen der Zylinder die Periodendauer und kann so mit dem berechneten Trägheitsmoment die Winkelrichtgröße k_D bestimmen.

2.2. Überprüfung des Steinerschen Satzes

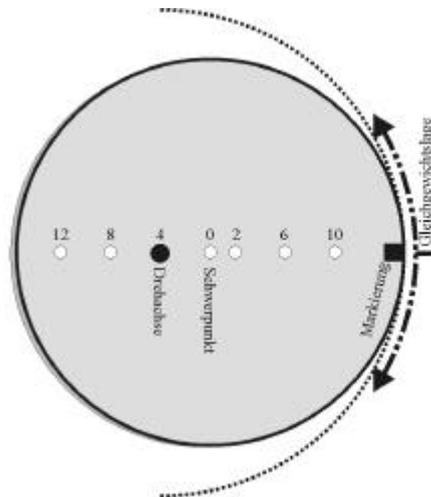


Abbildung 5: Satz von Steiner

Auf die Halterung der Drillachse wird zur Bestätigung des Satzes von Steiner eine Scheibe befestigt. Die Scheibe hat in bestimmten Abständen zum Mittelpunkt Bohrungen in denen die Drillachse befestigt werden kann. Die Scheibe wird ausgelenkt und vollführt um die jeweilige Drehachse eine harmonische Schwingung. Man misst nun mit verschiedenen Einstellungen der Scheibe, d.h. bei Drehungen um Achsen, welche parallel zur Achse durch den Schwerpunkt sind, die Periodendauer. Mit Hilfe der gleichen Formeln wie in 2.1.2. kann das jeweilige Trägheitsmoment der Scheibe bestimmt werden. Die Richtigkeit der Messung wird nun dadurch überprüft, dass man das jeweilige Trägheitsmoment mit Hilfe des Steinerschen Satzes bestimmt und mit dem jeweils gemessenen Wert vergleicht.

$$I = I_s + m \cdot h^2$$

2.3. Trägheitsmomente

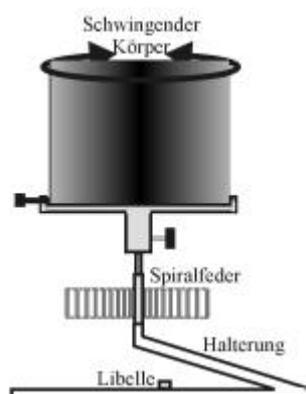


Abbildung 6: Trägheitsmomente

Auf die Drillachse wird nun ein Auflageteller montiert, worauf wahlweise ein Hohlzylinder aus Metall oder ein Vollzylinder aus Holz befestigt werden kann. Man versetzt den Zylinder in Schwingung und misst die Periodendauer. Man kann nun das Trägheitsmoment über die Periodendauer bestimmen. Diese wird nun mit dem Trägheitsmoment, welches aus den Abmessungen der Körper berechnet wird, verglichen.

2.4. Kreisel

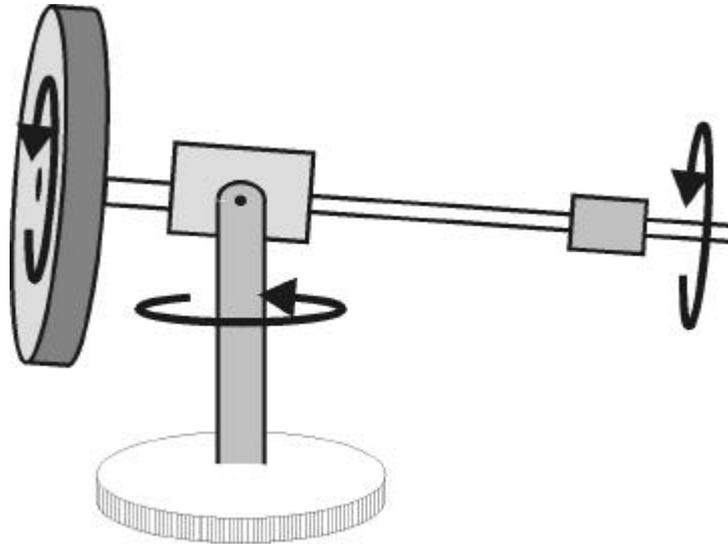


Abbildung 7: Kreisel

In diesem Versuch hat man einen Kreisel, wie in Abbildung 7, der sich im Gleichgewicht befindet. Verschiebt man nun die Masse auf der rechten Seite z.B. nach außen, so beginnt er eine Präzession mit der Kreisfrequenz ω um die Achse. Mit einem elektronischen Messgerät wird nun die Zeit gemessen, die der Kreisel für eine Drehung um 10 Skalenteile benötigt. Die Schwierigkeit liegt darin, dass der Kreisel bei dieser Bewegung keine Nutation ausführen soll, da sonst die Zeitmessung zu ungenau wird.

Für die Winkelgeschwindigkeit der Präzession gilt:

$$\omega_p = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{m \cdot g \cdot R}{L}$$

3. VERSUCHSAUSWERTUNG

3.1. Bestimmen der Winkelrichtgröße

3.1.1. Statische Methode

Bezeichnungen: m : Masse auf der Waagschale
 j : Winkel gegen die Ruhelage
 k : Richtgröße der Drehfeder

Formeln:
$$k = \frac{M}{j} = \frac{m \cdot g \cdot r}{j}$$

Größen: $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Radius: $r = 32,95 \text{ mm}$

Messungenauigkeit Δr des Radius: 0,05 mm

Messungenauigkeit Δj des Winkels: 1°

Masse m in [g]	j_1 in [$^\circ$]	j_2 in [$^\circ$]	Mittelwert in [$^\circ$]	j in [rad]	k in [Nm]
10,0	5,0	7,0	6,0	0,1047	0,03087
15,0	7,5	9,0	8,3	0,1440	0,03367
20,0	10,5	12,0	11,3	0,1963	0,03292
30,0	16,0	19,0	17,5	0,3054	0,03175
40,0	21,0	24,0	22,5	0,3927	0,03292
50,0	26,0	29,0	27,5	0,4800	0,03367
60,0	35,0	34,0	34,5	0,6021	0,03221
70,0	40,0	40,0	40,0	0,6981	0,03241
80,0	45,0	47,0	46,0	0,8029	0,03221
90,0	53,0	53,0	53,0	0,9250	0,03145
100,0	61,0	56,0	58,5	1,0210	0,03166
110,0	66,0	63,0	64,5	1,1257	0,03158
120,0	69,0	70,0	69,5	1,2130	0,03198
130,0	75,0	74,0	74,5	1,3003	0,03232
140,0	83,0	81,0	82,0	1,4312	0,03162
150,0	87,0	88,0	87,5	1,5272	0,03175
160,0	96,0	97,0	96,5	1,6842	0,03071
170,0	105,0	100,0	102,5	1,7890	0,03072
180,0	108,0	108,0	108,0	1,8850	0,03087
190,0	119,0	116,0	117,5	2,0508	0,02995
200,0	124,0	123,0	123,5	2,1555	0,02999

Arithmetisches Mittel: $\bar{k} = 0,0318 \text{ Nm}$

Gauss-Fehler: $dk = 0,0017 \text{ Nm}$

$$dk = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial r} \cdot \Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial j} \cdot \text{Max}(\Delta j; s_j)\right)^2}$$

Winkelrichtgröße: $k = 0,0318 \text{ Nm} \pm 0,0017 \text{ Nm}$

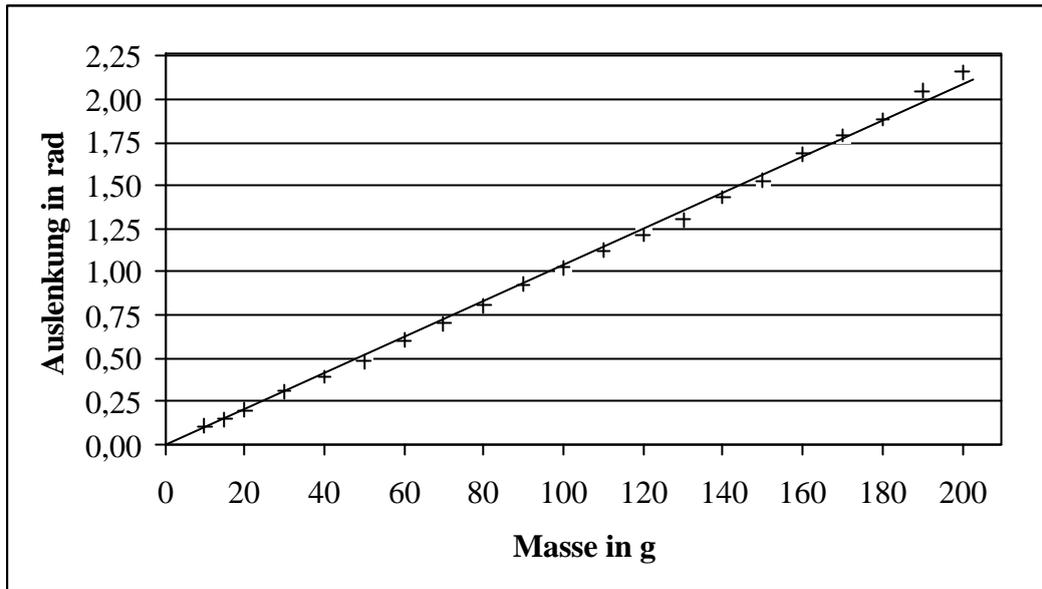


Abbildung 8: Graphische Bestimmung der Winkelrichtgröße

Steigung der Ausgleichsgeraden: $0,0104 \frac{1}{g}$

Winkelrichtgröße: $k = \frac{1}{\text{Steigung} \cdot 1000} \cdot g \cdot r$

$$k = 0,0311 Nm$$

3.1.2. Dynamische Methode

Bezeichnungen: m : Masse des jeweiligen Körpers
 r : Radius des jeweiligen Körpers
 l : Länge des jeweiligen Körpers
 R : Innenradius bzw. Außenradius
 x : Abstand der Zylinder vom Stabende
 T : Periodendauer

Formeln:

$$T = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I}{k_D}}$$

$$I = I_{Stab} + 2 \cdot I_{Hohlzylinder}$$

$$I_{Stab} = \frac{1}{4} \cdot m_{Stab} \cdot r_{Stab}^2 + \frac{1}{12} \cdot m_{Stab} \cdot l_{Stab}^2$$

$$I_{Hohlzylinder} = \frac{1}{4} \cdot m_{Hohlzylinder} \cdot \left(R_a^2 + R_i^2 + \frac{1}{3} \cdot l_{Hohlzylinder}^2 \right) + m_{Hohlzylinder} \cdot x_{Hohlzylinder}^2$$

Größen: $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Messungenauigkeit Δm der Masse: 0,1 g
 Messungenauigkeit Δt der Zeit: 0,3 s
 Messungenauigkeit Δl_{Stab} der Stablänge: 0,5 mm
 Messungenauigkeit der sonstigen Längen: 0,05 mm

Abmessungen der einzelnen Körper

	Stab	Zylinder 1	Zylinder 2	Zylinder	Standardab.
Masse m in [g]	133,9	255,5	254,7	255,1	0,56569
Länge l in [mm]	600	33,00	33,10	33,05	0,07071
Radius r in [mm]	3,05	17,55	17,55	17,55	0,00000
Innenradius R_i in [mm]	x	3,05	3,05	3,05	0,00000

Bemerkung: Beide Zylinder in diesem Versuch haben zwar verschiedene Abmessungen, aber da sie symmetrisch angeordnet sind können diese Unterschiede im Rahmen der Messgenauigkeit vernachlässigt werden. Deshalb haben wir beide Zylinder durch zwei Idealzylinder mit gleicher Masse und den gleichen Abmessungen „ersetzt“.

Messung 1: Die Zylinder sind auf beiden Seiten bündig
 Messung 2: Die Zylinder sind auf beiden Seiten 50 mm eingerückt
 Messung 3: Die Zylinder sind auf beiden Seiten 100 mm eingerückt
 Messung 4: Die Zylinder sind auf beiden Seiten 150 mm eingerückt
 Messung 5: Die Zylinder sind auf beiden Seiten 200 mm eingerückt
 Messung 6: Die Zylinder sind auf beiden Seiten 250 mm eingerückt

Bestimmen der Trägheitsmomente mit den geometrischen Abmessungen

Trägheitsmoment	1	2	3	4	5	6
I_{Stab} [kgm ²]	0,00402	0,00402	0,00402	0,00402	0,00402	0,00402
I_{Zylinder} in [kgm ²]	0,02054	0,01395	0,00863	0,00459	0,00182	0,00033
I_{gesamt} in [kgm ²]	0,04510	0,03192	0,02128	0,01319	0,00766	0,00468
Gauss-Fehler δI_{ges} in [kgm ²]	0,00043	0,00039	0,00036	0,00032	0,00028	0,00025

Formel für den Gauss-Fehler

$$dI = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m_{\text{stab}}} \cdot \Delta m_{\text{stab}}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial r_{\text{stab}}} \cdot \Delta r_{\text{stab}}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial l_{\text{stab}}} \cdot \Delta l_{\text{stab}}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial m_{\text{Hohlzylinder}}} \cdot sm_{\text{Hohlzylinder}}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial l_{\text{Hohlzylinder}}} \cdot \Delta l_{\text{Hohlzylinder}}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial x_{\text{Hohlzylinder}}} \cdot \Delta x_{\text{Hohlzylinder}}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R_a} \cdot \Delta R_a\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R_i} \cdot \Delta R_i\right)^2}$$

Bestimmen der Richtgröße

	1	2	3	4	5	6
Zeit 1 für 5 Perioden in [s]	37,55	31,62	25,97	20,44	15,40	12,03
Zeit 2 für 5 Perioden in [s]	37,50	31,66	25,88	20,28	15,43	12,09
Zeit 3 für 5 Perioden in [s]	37,50	31,66	25,91	20,31	15,34	12,03
Zeit 4 für 5 Perioden in [s]	37,47	31,68	25,59	20,34	15,41	12,12
Arith. Mittel in [s]	37,51	31,66	25,84	20,34	15,40	12,07
Periodendauer T in [s]	7,501	6,331	5,168	4,069	3,079	2,414
Standardabweichung σ_T in [s]	0,0066	0,0050	0,0338	0,0139	0,0077	0,0090
Richtgröße k in [Nm]	0,0316	0,0314	0,0315	0,0315	0,0319	0,0317
Gauss-Fehler δk_D in [Nm]	0,0025	0,0035	0,0053	0,0088	0,0161	0,0257

Arithmetisches Mittel: $\bar{k} = 0,0316 \text{ Nm}$

Gauss-Fehler: $d k_D = 0,01032 \text{ Nm}$

$$d k_D = \sqrt{\left(\frac{\partial k_D}{\partial T} \cdot \text{Max}(\Delta T; s_T)\right)^2 + \left(\frac{\partial k_D}{\partial I} \cdot dI\right)^2}$$

Winkelrichtgröße: $k = 0,0318 \text{ Nm} \pm 0,01032 \text{ Nm}$

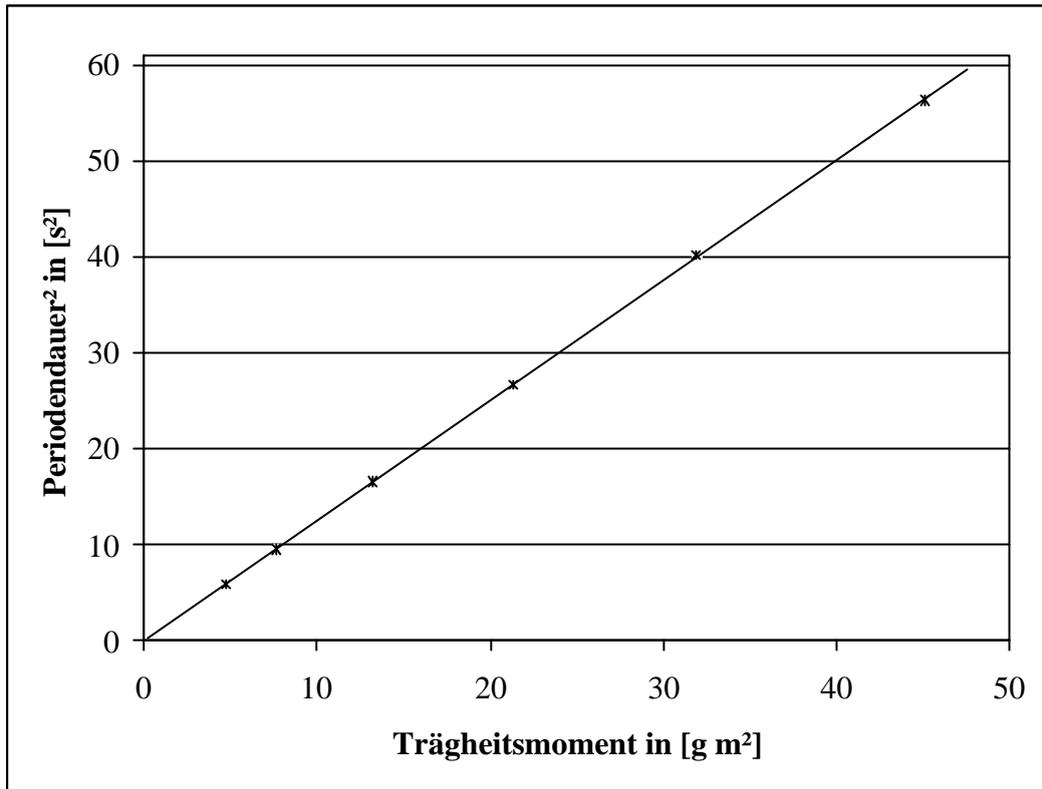


Abbildung 9: Proportionalität T^2 und I

Steigung: $1250,8 \frac{1}{Nm}$

$$k = \frac{4 \cdot p^2}{\text{Steigung}}$$

$$k = 0,0316 Nm$$

Im Folgenden wird die in 3.1. bestimmte Richtgröße verwendet.

3.2. Steinerscher Satz

Bezeichnungen: m : Masse der Scheibe
 r : Radius der Scheibe
 h : Abstand zum Schwerpunkt
 T : Periodendauer

Formeln:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{k_D}}$$

$$I_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

$$I = I_S + m_{ges} \cdot h^2$$

Größen: $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Messungenauigkeit Δm der Masse: 0,1 g
 Messungenauigkeit Δt der Zeit: 0,3 s
 Messungenauigkeit Δr des Radius: 1,0 mm
 Messungenauigkeit der sonstigen Längen: 0,05 mm

Masse m der Scheibe: 716,4 g
 Radius r der Scheibe: 200,00 mm

Abstand von Mittelpunkt in [mm]	0	20	40	60	100
Zeit 1 in [s] für 5 Perioden	21,28	21,65	22,44	22,62	24,78
Zeit 2 in [s] für 5 Perioden	21,34	21,75	22,53	22,59	24,68
Zeit 3 in [s] für 5 Perioden	21,28	21,56	22,59	22,54	24,72
Zeit 4 in [s] für 5 Perioden	21,37	21,72	22,53	22,5	24,81
Arithmetisches Mittel in [s]	21,32	21,67	22,52	22,56	24,75
Periodendauer T in [s]	4,264	4,334	4,505	4,513	4,950
Standardabweichung σ in [s]	0,045	0,084	0,062	0,053	0,059
Trägheitsmoment	0,01455	0,01503	0,01624	0,01630	0,01961
Gauss - Fehler	0,00041	0,00059	0,00045	0,00043	0,00048

Gauss-Fehler:
$$dI = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial T} \cdot \text{Max}(\Delta T; s_T)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial k_D} \cdot dk_D\right)^2}$$

Berechnete Werte der Trägheitsmomente zum Vergleich:

Abstand von Mittelpunkt in [mm]	0	20	40	60	100
Trägheitmoment Scheibe	0,01433	0,01433	0,01433	0,01433	0,01433
Steinerscher Satz	0,00000	0,00029	0,00115	0,00258	0,00716
Gesamträgheitsmoment	0,01433	0,01461	0,01547	0,01691	0,02149
Gauss - Fehler	0,00014	0,00014	0,00015	0,00015	0,00016

Gauss-Fehler:
$$dI = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial r} \cdot \Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2}$$

3.3. Trägheitsmomente

Bezeichnungen: m : Masse des jeweiligen Körpers
 r : Radius des jeweiligen Körpers
 R : Innenradius bzw. Außenradius jeweiligen Körpers
 T : Periodendauer

Formeln:

$$I_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

$$I_{\text{Hohlzylinder}} = \frac{1}{2} \cdot m_{\text{Hohlzylinder}} \cdot (R_a^2 + R_i^2)$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{k_D}}$$

Größen: $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Messungenauigkeit Δm der Masse: 0,1 g
 Messungenauigkeit der Längen: 0,05 mm

Abmessungen der Körper

	Auflage	Zylinder	Hohlzylinder
Masse m in [g]	223,9	404,8	404,2
Höhe außen in [mm]	11,80	89,95	x
Höhe innen in [mm]	4,80	x	x
Außenradius in [mm]	50,13	43,95	45,00
Innenradius in [mm]	45,00	x	43,00

Aus den geometrischen Abmessungen bestimmte Trägheitsmomente:

- Trägheitsmoment der Auflagescheibe: $I_{Scheibe} = 0,00020253 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Trägheitsmoment des Zylinders: $I_{Zylinder} = 0,00039096 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Trägheitsmoment des Hohlzylinders: $I_{Hohlzylinder} = 0,00078294 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Trägheitsmoment von Auflage & Zylinder: $I_1 = 0,00059349 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Trägheitsmoment von Auflage & Hohlzylinders: $I_2 = 0,00098547 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Bestimmen der Trägheitsmomente aus den Messergebnissen

	Zylinder	Hohlzylinder
Messung 1 in [s]	2,53	3,37
Messung 2 in [s]	2,50	3,31
Messung 3 in [s]	2,54	3,25
Messung 4 in [s]	2,62	3,35
Messung 5 in [s]	2,56	3,31
Messung 6 in [s]	2,62	3,28
Messung 7 in [s]	2,56	3,41
Messung 8 in [s]	2,47	3,38
Messung 9 in [s]	2,56	3,31
Messung 10 in [s]	2,46	3,41
Messung 11 in [s]	2,56	3,34
Messung 12 in [s]	2,56	3,38
Messung 13 in [s]	2,57	3,38
Messung 14 in [s]	2,57	3,41
Messung 15 in [s]	2,51	3,31
Arithmetisches Mittel in [s]	2,55	3,35
Standarabweichung in [s]	0,0463	0,0501
Periodendauer T in [s]	0,849	1,116
Trägheitsmoment I in [kgm ²]	0,000576	0,000996
Gauss	0,0001392	0,0001861

Gauss-Fehler:
$$dI = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial T} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial k_D} \cdot dk_D\right)^2}$$

3.4. Kreisel

Bezeichnungen: m : Masse des Gewichtstücks
 f : Frequenz

Formel:
$$w_p = \frac{dj}{dt} = \frac{m \cdot g \cdot R}{L}$$

Messungenauigkeit Δm der Masse: 0,1 g
 Messungenauigkeit der sonstigen Längen: 0,05 mm
 Messungenauigkeit Δt der Zeit: 0,001 s
 Frequenzungenauigkeit: 10 Hz

Masse Gewichtstück: 377,3 g
 Frequenz: 893 Hz

Abstand vom Schwerpunkt in [mm]	94,75	82,05	69,6	56,75	44,15	-42,25
Drehmoment in [Nm]	0,351	0,304	0,258	0,210	0,163	-0,156
Zeit 1 für 10 Teilstriche in [s]	1,809	2,121	2,529	3,049	4,032	3,791
Zeit 2 für 10 Teilstriche in [s]	1,814	2,143	2,530	3,073	4,016	3,734
Zeit 3 für 10 Teilstriche in [s]	1,782	2,134	2,483	3,107	4,055	3,803
Zeit 4 für 10 Teilstriche in [s]	1,805	2,143	2,501	3,049	4,034	3,762
Zeit 5 für 10 Teilstriche in [s]	1,824	2,133	2,507	3,156	3,960	3,774
Zeit 6 für 10 Teilstriche in [s]	1,800	2,149	2,503	3,118	4,051	3,765
Zeit 7 für 10 Teilstriche in [s]	1,793	2,117	2,551	3,126	3,959	3,813
Zeit 8 für 10 Teilstriche in [s]	1,805	2,119	2,508	3,088	4,075	3,735
Zeit 9 für 10 Teilstriche in [s]	1,795	2,148	2,500	3,083	4,078	3,745
Zeit 10 für 10 Teilstriche in [s]	1,814	2,137	2,485	3,085	4,025	3,766
Zeit 11 für 10 Teilstriche in [s]	1,822	2,135	2,473	3,072	4,058	3,826
Zeit 12 für 10 Teilstriche in [s]		2,144	2,489	3,062		
Mittelwert in [s]	1,806	2,135	2,505	3,089	4,031	3,774
Standardabweichung in [s]	0,013	0,011	0,022	0,032	0,040	0,031
Präzessionsfrequenz in [1/s]	0,387	0,327	0,279	0,226	0,173	-0,185

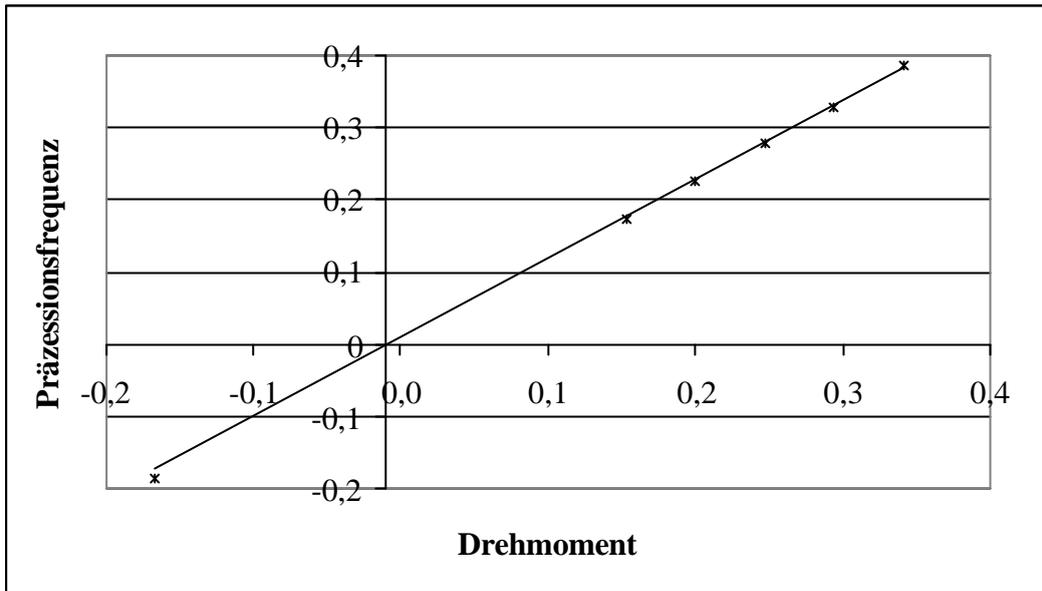


Abbildung 10: Drehmoment-Präzessionsfrequenz-Diagramm

4. FEHLERDISKUSSION

4.1. Statische Methode

Bei der statischen Methode gibt es mehrere größere Fehlerquellen. Eine liegt darin, dass man maximal von einer Ablesegenauigkeit von einem Grad ausgehen kann, da aufgrund des recht kurzen Zeigers der Abstand zu den Skalenteilen groß ist und daher die Werte nur auf ganze Grad geschätzt werden können. Allerdings war schon die Justierung des Nullpunktes ein großes Problem, da an der Apparatur eine recht große Dämpfung durch Reibung festzustellen war. Diese ist zum einen dafür verantwortlich, dass man beim Einstellen auf den Nullpunkt nach jeder Auslenkung auf einen etwas anderen Wert zurückkam und zum anderen, dass die Abweichung der Auslenkung bei gleichen Gewichten und zweierlei Messungen zum Teil beachtlich war. Auch durch die Umlenkrolle, die keinesfalls reibungsfrei gelagert war, kommt noch ein gewisser Fehler hinzu.

Besonders stark traten diese Fehler natürlich bei kleinen Gewichten in Erscheinung, weshalb wir diese in unsere Berechnungen nicht mit einbezogen haben.

Bei großen Auslenkungen weichen die Werte allerdings ebenfalls von den mittleren Werten ab, was wohl darauf zurückzuführen ist, dass man den Proportionalitätsbereich der Feder, den Hooke'schen Bereich, langsam verlässt.

Bei einigen Messungen war zudem noch die Befestigungsschraube der Schnur im Weg, so dass diese an der Schraube scheuerte. Diesen Werten ist die Reibung deutlich anzusehen da sie vor allem untereinander eine größere Abweichung als die anderen Werte aufweisen.

4.2. Dynamische Methode

Bei der dynamischen Methode war die Dämpfung ebenfalls recht groß, weshalb nicht mehr als fünf Perioden auf einmal zu messen waren. Diese Dämpfung hat natürlich auch auf die so gemessenen Mittelwerten einen solchen Einfluss, dass dieser nicht mit der Periodendauer für eine ungedämpfte Schwingung übereinstimmt. Die Zeitmessung weißt ebenfalls einen recht hohen Fehler auf, da sie mit Stoppuhren gemessen wurde und der Nulldurchgang mit maximaler Geschwindigkeit recht schwierig zu fixieren war.

4.3. Steinerscher Satz

Ebenso wie bei den anderen Versuchen lag auch hier wieder eine recht starke Dämpfung vor. Das Problem der Zeitmessung war hier noch größer als bei den vorigen Versuchen. Es wurde wieder mit der Stoppuhr gemessen, doch dadurch, dass die Scheibe eine Schwingung vollführt, bei der an einem festen Punkt der Abstand zur Scheibe ständig variiert, war der Nulldurchgang noch schwieriger zu bestimmen als in den vorigen Versuchen.

Die Abnahme der Genauigkeit bezüglich der berechneten Werte für größere Abstände ist wohl hauptsächlich auf einen Punkt zurückzuführen. Die Scheibe verursacht, wenn sie nicht im Mittelpunkt gelagert ist, ein Drehmoment, das auf die Lager der Drillachse wirkt und dort eine starke Erhöhung der Reibung bewirkt. Diese führte dann bei größerem Abstand zum Schwerpunkt zu einer Erhöhung der Dämpfung und damit einem größeren Fehler der Messung.

4.4. Trägheitsmoment

Auch hier war nun die Dämpfung wieder der bedeutendste Einfluss. So war es bei diesem Versuch nur möglich, drei aufeinander folgende Perioden zu messen, da danach kaum noch eine Auslenkung vorhanden war. Wie schon oben erwähnt, führt dies natürlich zu einem sehr hohen Fehler. Hinzu kam noch, dass die Periodendauer recht kurz war, und so der Messfehler noch stärker ins Gewicht fällt. Zum Befestigen des Hohlzylinders und des Vollzylinders wurde dann ein Aufsatz verwendet, der zur Berechnung des Trägheitsmomentes nur genähert werden konnte und somit die berechneten Werte doch recht deutlich von der Wirklichkeit abweichen können.

Nicht vergessen werden darf auch, dass die hier berechneten Werte mit dem Wert der Federkonstante aus den ersten beiden Versuchen berechnet wurden, die eben auch nur mit recht großen Fehlern bestimmt wurde.

4.5. Kreisel

Hier gibt es eigentlich nur einen, aber dafür sehr großen Fehler. Der Kreisel beginnt bei der Präzession eine mehr oder weniger starke Nutation. Diese wurde zum Teil so groß dass die Zeitmessung abgebrochen werden musste. Je größer allerdings die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage war, desto geringer war der Fehler durch die Nutation. Durch eine größere Anzahl an Versuchen, konnten dann doch noch recht gute Messergebnisse erzielt werden.

Ein kleiner Fehler mag auch noch in der nicht ganz konstanten Drehfrequenz des Kreisels liegen, deren Messung jedoch nicht zeitgleich zu den Präzessionsmessungen durchgeführt wurde.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Bergmann – Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik Band 1 Mechanik, Relativität, Wärme.*
Walter de Gruyter, 1998
- [2] Christian Gerthsen: *Physik.*
Springer Verlag, 1999
- [3] Alonso/ Finn: *Physik*
Addison – Wesley Verlag GmbH, 1977
- [4] Paul A. Tipler: *Physik.*
Spektrum Akademischer Verlag, 1998
- [5] Horst Stöcker: *Taschenbuch der Physik.*
Harri Deutsch Verlags AG, 1997
- [6] Hans Breuer: *dtv – Atlas zur Physik.*
Deutscher Taschenbuch Verlag, 1994
- [7] Richard Knoerr: *Knaurs Lexikon der Physik.*
Droemersch Verlagsanstalt, 1988