Versuch Nr. 2

Gekoppelte Pendel

Andreas Josef Birnesser

Andreas.Birnesser@wirtschaftsphysik.de

Sascha Wagner

Sascha.Wagner@wirtschaftsphysik.de

09. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Eine sich im Laufe der Zeit periodisch wiederholende Bewegungsform nennt man **freie Schwingung**, wenn auf das schwingende System keine äußere Kraft wirkt. Hat die Ortskurve *r(t)* eines bestimmten schwingenden Teilchens einen sinusförmigen Verlauf, so liegt eine spezielle Form der freien Schwingung vor, die sogenannte **harmonische freie Schwingung**. Wirkt eine äußere Kraft auf das schwingende System, welche die Schwingung dämpft, so spricht man von einer **gedämpften Schwingung**.

1.1. Die Schwingungsgleichung der harmonischen Schwingung

1.1.1. Definition

Ein System zur Erzeugung einer harmonischen Schwingung wird als harmonischer Oszillator bezeichnet. Dabei wird ein Gegenstand aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt, und es wirkt eine rücktreibende Kraft auf ihn. Bei hinreichend kleinen Auslenkungen ist die Kraft proportional zur Auslenkung. Ein gutes Beispiel liefert ein an einer Feder befestigter Körper. Für die rücktreibende Kraft gilt das Hookesche Gesetz:

$$F = -k \cdot x = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}, \tag{1}$$

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x. \tag{2}$$

Bei einer harmonischen Schwingung ist die Beschleunigung proportional zur Auslenkung und dieser entgegengesetzt. Mit Hilfe dieser Eigenschaft lässt sich bestimmen, ob ein Körper harmonisch schwingt.

Die Größe $\frac{k}{m}$ wird als Winkelgeschwindigkeitsquadrat w^2 bezeichnet. Für die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung gilt:

$$\ddot{x} + w^2 \cdot x = 0 \tag{3}$$

Eine mögliche Lösung der Differentialgleichung (3) ist die Gleichung:

$$x(t) = A \cdot \cos(w \cdot t + d) \tag{4}$$

x(t) beschreibt die momentane Position des schwingenden Körpers, die als Auslenkung oder Elongation bezeichnet wird. Die maximale Elongation wird Amplitude *A* genannt. Der Phasenwinkel d gibt die Lage des Nulldurchgangs der Auslenkung relativ zum Zeitnullpunkt an. Die Kreisfrequenz w kann auch noch auf folgende Weise geschrieben werden:

$$w = 2 \cdot p \cdot n \tag{5}$$

Die Zeit für eine vollständige Schwingung eines Körpers wird als Schwingungsdauer oder Periode bezeichnet. Die Frequenz n ist der Kehrwert der Periodendauer *T*:

$$n = \frac{1}{T}. \tag{6}$$

Nach Ableiten der Gleichung (4) erhält man die Geschwindigkeitsfunktion v*(t)*:

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} = -A \cdot w \cdot \sin\left(w \cdot t + d\right). \tag{7}$$

Die Geschwindigkeit und die Auslenkung sind um $\frac{p}{2}$ phasenverschoben. Durch nochmaliges Differenzieren erhält man die *a(t)* – Funktion:

$$a(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -w^2 \cdot A \cdot \cos(w \cdot t + d) = -w^2 \cdot x(t). \tag{8}$$

1.1.2. Energiebilanz bei der harmonischen Schwingung

Bei einem harmonisch schwingenden Körper wandeln sich potentielle und kinetische Energie ständig ineinander um. Die potentielle Energie bei der Auslenkung $x(t)$ beträgt:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x(t)^2 . \tag{9}$$

die kinetische, wenn der Gegenstand die Geschwindigkeit v*(t)* besitzt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \mathrm{v}(t)^2 . \tag{10}$$

Die Gesamtenergie ist konstant und beträgt:

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x(t)^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \mathrm{v}(t)^2 . \tag{11}$$

1.1.3. Der Phasenraum

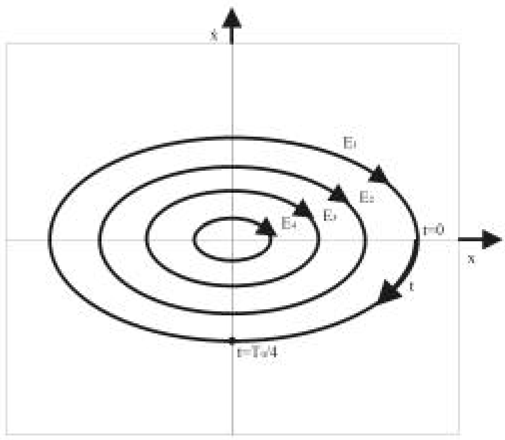

Abbildung 1: Trajektorien

Die Schwingungsbewegung kann neben dem herkömmlichen *x(t)*-Diagramm noch auf eine andere Weise dargestellt werden. Dabei wird der Ort x des Schwingers als Abszisse und die Geschwindigkeit $\dot{x}$ als Ordinate aufgetragen. Die Abbildung 1 zeigt einen Schnitt durch den sogenannten Phasenraum. Bei einer vorgegebenen Gesamtenergie E bewegt sich das schwingende System auf einer Ellipsenbahn, wobei die Zeit längs der Kurve fortschreitet. Diese Linien werden auch Trajektorien genannt. Mit Hilfe der Trajektorien lässt sich das Verhalten komplizierter Schwingungsbewegungen an bestimmten Stellen ermitteln.

1.2. Näherung: *sin* a » a

Im Folgenden werden wir häufig die Näherung $\sin a \approx a$ für kleine Winkel (rad) benutzen. Die Gültigkeit dieser Näherung lässt sich durch eine Taylorentwicklung von $\sin a$ an der Stelle 0 zeigen:

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n \tag{12}$$

mit $f(x) = \sin a$, $x_0 = 0$ und $x = a$:

$$\sin a = a - \frac{1}{6} a^3 + \frac{1}{120} a^5 + O(a^6) \tag{13}$$

hier sieht man nun, dass für kleine Winkel die Werte ab a^3 so klein werden, so dass sie kaum ins Gewicht fallen.

1.3. Federpendel

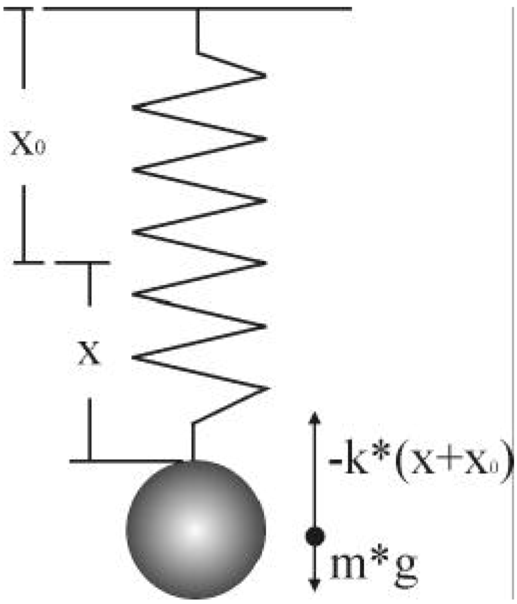

Abbildung 2: Federpendel

Ein Gegenstand befindet sich an einer vertikal aufgehängten Feder, die dadurch um die Strecke x_0 aus ihrer Ruhelage gedehnt wird. Die Feder wird zusätzlich um eine Strecke x ausgelenkt. An dem Körper greifen die nach oben gerichtete Federkraft

$$F_F = -k \cdot (x_0 + x) \tag{14}$$

und die nach unten gerichtete Gewichtskraft

$$F_G = m \cdot g \ . \tag{15}$$

Das zweite Newtonsche Gesetz liefert folgende Bewegungsgleichung:

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot (x_0 + x) + m \cdot g \ . \tag{16}$$

Für die Gleichgewichtslage des Körpers gilt:

$$m \cdot g = k \cdot x_0 \tag{17}$$

Kombiniert man Gleichung (14) und (15), so erhält man die Schwingungsdifferentialgleichung des Federpendels für massenlose Federn:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \tag{18}$$

Die Gewichtskraft bewirkt also nur eine Verschiebung der Ruhelage nach x_0.

1.4. Das mathematische Pendel

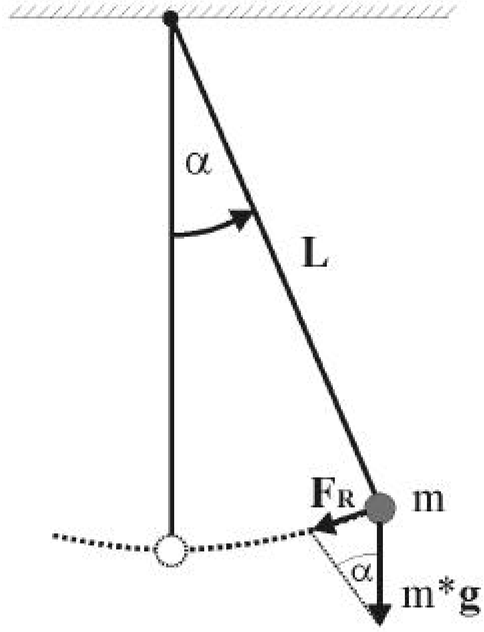

Abbildung 3: Mathematisches Pendel

Im Vergleich zum Federpendel, bei dem sich die Schwingungsbewegung eindimensional beschreiben ließ, handelt es sich beim mathematischen Pendel um eine Bewegung in zwei Raumrichtungen, die sich jedoch recht oft auf eine einzige Winkelkoordinate reduzieren lässt.
Beim mathematischen Pendel geht man davon aus, dass eine Punktmasse *m* an einem masselosen Faden der Länge *L* aufgehängt ist. Wenn man die Masse *m* um einen Winkel a aus ihrer Ruhelage auslenkt, wird sie zur Ruhelage zurückkehren, aber aufgrund ihrer Trägheit über sie hinaus schwingen und eine periodische Bewegung ausführen. Aus Abbildung 3 ist ersichtlich, dass die rücktreibende Kraft durch

$$F_R = -m \cdot g \cdot \sin a \tag{19}$$

gegeben ist. Nach den Newtonschen Axiomen und den Grundprinzipien der Rotationsbewegung gilt:

$$F = m \cdot a = m \frac{d^2 s}{dt^2} = m \cdot L \frac{d^2 a}{dt^2}. \tag{20}$$

Setzt man Gleichung (19) und (20) gleich

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \sin a = 0. \tag{21}$$

Diese Gleichung stellt eine nicht lineare Differentialgleichung dar, die jedoch mit Hilfe der Näherung $\sin a \approx a$ vereinfacht werden kann:

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot a = 0 \tag{22}$$

Die Lösung lässt sich allgemein angeben mit:

$$a = A_1 \sin wt + A_2 \cos wt \tag{23}$$

Die Kreisfrequenz w beträgt

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}}\,. \tag{24}$$

Daraus lässt sich die Periodendauer der Schwingung berechnen.

$$T = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{25}$$

1.4.1. Physikalisches Pendel

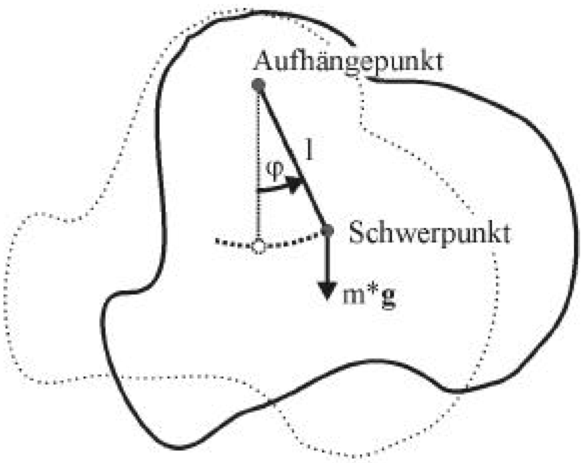

Abbildung 4: Physikalisches Pendel

Unter einem physikalische Pendel versteht man einen starrer Körper, dessen Drehachse außerhalb des Schwerpunktes liegt. Der Schwerpunkt mit dem Abstand *l* vom Aufhängepunkt vollführt somit eine Schwingung, für welche das Drehmoment

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F} \tag{26}$$

der Auslenkung entgegenwirkt. Somit gilt für das rücktreibende Drehmoment:

$$M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin j \qquad (27)$$

Für kleine Auslenkungen lässt sich nun die Näherung $\sin j \approx j$ anwenden:

$$M = -m \cdot g \cdot l \cdot j \tag{28}$$

ebenso gilt für das Drehmoment folgende Gleichung

$$M = I \cdot a = I \cdot \ddot{j} \tag{29}$$

Die beiden Gleichungen (28) und (29) gleichgesetzt ergibt:

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot l \cdot \varphi$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \tag{30}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich auch, wie alle anderen Schwingungsgleichungen dieser Art lösen, wobei für

$$\omega^2 = \frac{m \cdot g \cdot l}{I} \tag{31}$$

gilt. Hieraus lässt sich nun mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Gleichung für die Schwingungsdauer T ausdrücken:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot l}}\,. \tag{32}$$

1.5. Gekoppelte Pendel

1.5.1. Herleitung und Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung

Wirken zwischen zwei schwingungsfähigen Systemen Kräfte, die von der Auslenkung des Systems abhängen, dann nennt man sie gekoppelte Systeme. Ein Beispiel hierfür sind zwei durch eine Feder gekoppelte Schwerependel.

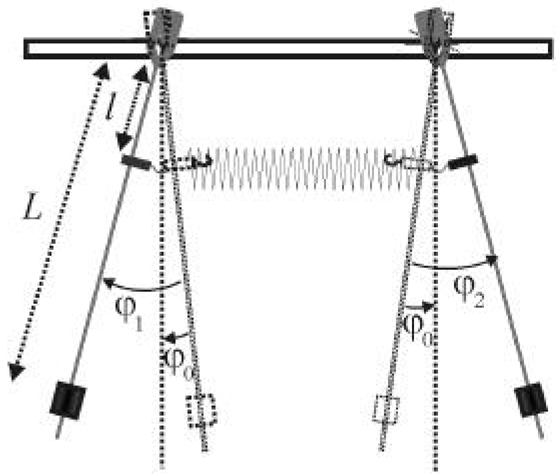

Abbildung 5: Herleitung gekoppeltes Pendel

Beide Schwerependel werden durch das Anhängen der Kopplungsfeder um einen Winkel φ_0 aus der vertikalen Lage ausgelenkt. Da beide Pendel sich in Ruhe befinden, muss ein Gleichgewicht der Drehmomente herrschen. Dabei gilt für das Drehmoment, welches durch die Kopplungsfeder ausgelöst wird:

$$M_{F,0} = -k \cdot l^2 \cdot \varphi_0 \tag{33}$$

Die Richtgröße der Feder wird dabei mit k bezeichnet und l ist der Kopplungsabstand beider Federn. Das Drehmoment, welches durch die Gewichtskraft der Massen hervorgerufen wird, ergibt sich zu:

$$M_{G,0} = -m \cdot g \cdot L \cdot \varphi_0 \tag{34}$$

Aufgrund des zuvor erwähnten Gleichgewichts gilt folgende Beziehung:

$$M_{G,0} - M_{F,0} = 0 \tag{35}$$

$$-m \cdot g \cdot L \cdot j_0 + k \cdot l^2 \cdot j_0 = 0 \tag{36}$$

Nun lenkt man das linke Pendel um den Winkel j_1 und das rechte Pendel um den Winkel j_2 aus. Auf das rechte Pendel wirkt nun ein durch die Gewichtskraft hervorgerufenes Drehmoment:

$$M_{2,G} = -m \cdot g \cdot L \cdot (j_2 - j_0) \tag{37}$$

Und das durch die Kopplungsfeder verursachte Drehmoment:

$$M_{2,F} = -k \cdot l^2 \cdot (j_2 + j_0 - j_1) \tag{38}$$

Da das resultierende Drehmoment gleich der Summe aller angreifenden Drehmomente ist, gilt folgende Drehmomentbeziehung:

$$M_2 = -m \cdot g \cdot L \cdot (j_2 - j_0) - k \cdot l^2 \cdot (j_2 + j_0 - j_1) \tag{39}$$

Verknüpft man nun diese Gleichung mit der Gleichgewichtsbedingung, ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$M_2 = -m \cdot g \cdot L \cdot j_2 - k \cdot l^2 \cdot (j_2 - j_1) \tag{40}$$

Für $M = I \cdot \ddot{j}$ kann die Gleichung folgendermaßen geschrieben werden:

$$I\ddot{j}_2 + m \cdot g \cdot L \cdot j_2 + k \cdot l^2 \cdot (j_2 - j_1) = 0 \tag{41}$$

Für das linke Pendel gilt analog:

$$I\ddot{j}_1 + m \cdot g \cdot L \cdot j_1 + k \cdot l^2 \cdot (j_1 - j_2) = 0 \tag{42}$$

Addiert bzw. Subtrahiert man die Gleichung für das linke Pendel und die Gleichung des rechten Pendels, so ergibt sich mit Hilfe der Substitutionen $\Psi = (j_1 + j_2)$ und $\Phi = (j_1 - j_2)$ folgende Differentialgleichungen:

$$\ddot{y} + \frac{m \cdot g \cdot L}{I} \cdot \Psi = 0 \tag{43}$$

$$\ddot{\Phi} + \frac{m \cdot g \cdot L + 2 \cdot k \cdot l^2}{I} \cdot \Phi = 0 \tag{44}$$

Beide Gleichungen haben die charakteristische Form einer harmonischen Schwingung. Die Kreisfrequenz können daher folgendermaßen berechnet werden:

$$w_1 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L}{I}} \tag{45}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L + 2 \cdot k \cdot l^2}{I}} \tag{46}$$

Für ihre Schwingungsgleichungen gilt:

$$y(t) = A_1 \cdot \cos w_1 \cdot t + B_1 \sin w_1 \cdot t \tag{47}$$

$$\Phi(t) = A_2 \cdot \cos w_2 \cdot t + B_2 \sin w_2 \cdot t \tag{48}$$

Durch Rücksubstitution erhält man die Gleichungen der beiden entkoppelten Pendel:

$$\varphi_1(t) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(A_1 \cdot \cos\omega_1 \cdot t + B_1 \sin\omega_1 \cdot t + A_2 \cdot \cos\omega_2 \cdot t + B_2 \sin\omega_2 \cdot t\right) \tag{49}$$

$$\varphi_2(t) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(A_1 \cdot \cos\omega_1 \cdot t + B_1 \sin\omega_1 \cdot t - A_2 \cdot \cos\omega_2 \cdot t + B_2 \sin\omega_2 \cdot t\right) \tag{50}$$

1.5.2. Schwingungsmoden

Im folgenden wird davon ausgegangen, dass die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind, d.h. $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Der Grund dafür ist, dass diese Geschwindigkeiten nur sehr schwer messtechnisch zu ermitteln sind. Außerdem wäre es nahezu unmöglich einen vollständig reproduzierbaren Versuchsablauf zu gewährleisten. Setzt man nun diese Anfangsbedingungen in die Gleichungen (49) und (50), so folgt, dass $B_1 = B_2 = 0$.

<u>Gleichsinnige Schwingung:</u>

Lenkt man beide Pendel um den selben Winkel in gleiche Richtung aus und lässt sie gleichzeitig zum Zeitpunkt $t = 0$ los, so schwingen beide gleichphasig. Mathematisch formuliert lauten die Anfangsbedingungen:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \hat{\varphi} \tag{51}$$

Aus den Gleichungen (47) und (48) folgt:

$$A_1 + A_2 = 2 \cdot \hat{\varphi} \tag{52}$$

$$A_1 - A_2 = 2 \cdot \hat{\varphi} \tag{53}$$

$$\Rightarrow A_1 = 2 \cdot \hat{\varphi} \tag{54}$$

Es ergibt sich also folgende Form der Schwingungsgleichung:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \hat{\varphi} \cdot \cos\omega_1 t \tag{55}$$

Die Feder wird während der Schwingung nicht beansprucht.

<u>Gegensinnige Schwingung:</u>

Lenkt man beide Pendel um den gleichen Winkel in entgegengesetzter Richtung aus und lässt sie gleichzeitig zum Zeitpunkt $t = 0$ los, so schwingen beide gegenphasig. Mathematisch formuliert lauten die Anfangsbedingungen:

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \hat{\varphi} \tag{56}$$

Aus den Gleichungen (49) und (50) folgt:

$$A_1 + A_2 = 2 \cdot \hat{\varphi} \tag{57}$$

$$-A_1 + A_2 = 2 \cdot \hat{\varphi} \tag{58}$$

$$\Rightarrow A_2 = 2 \cdot \hat{\varphi} \tag{59}$$

Es ergeben sich also folgende Schwingungsgleichungen:

$$\varphi_1(t) = \hat{\varphi} \cdot \cos\omega_2 t \tag{60}$$

$$\varphi_2(t) = -\hat{\varphi} \cdot \cos\omega_2 t \tag{61}$$

1.5.3. Schwebungen

Ein Pendel wird zum Herstellen des Schwebungsfalles ausgelenkt, während das andere Pendel in der Ruhelage festgehalten wird. Lässt man nun beide Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ frei schwingen, so stellt sich der Schwebungsfall ein. Auch hier gilt, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null sei. Daher folgt wie in 1.5.2. $B_1 = B_2 = 0$.
Anfangsbedingungen:

$$j_1(0) = \hat{j} \tag{62}$$

$$j_2(0) = 0 \tag{63}$$

Für diese Anfangsbedingungen ergeben sich die Gleichungen (49) und (50) zu:

$$A_1 + A_2 = 2 \cdot \hat{j} \tag{64}$$

$$A_1 - A_2 = 0 \tag{65}$$

$$\Rightarrow A_1 = \hat{j}$$

$$\Rightarrow A_2 = \hat{j}$$

Für das Pendel 1 ergibt sich mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme nachfolgende Schwingungsgleichung:

$$j_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\hat{j} \cdot \cos w_1 t + \hat{j} \cdot \cos w_2 t\right) \tag{66}$$

$$j_1 = \hat{j} \cdot \cos\left(\frac{w_1 + w_2}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{w_1 - w_2}{2} \cdot t\right) \tag{67}$$

Für das Pendel 2 folgt auf analoge Weise:

$$j_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\hat{j} \cdot \cos w_1 t + \hat{j} \cdot \cos w_2 t\right) \tag{68}$$

$$j_2 = \hat{j} \cdot \sin\left(\frac{w_1 + w_2}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{w_1 - w_2}{2} \cdot t\right) \tag{69}$$

An den Gleichungen ist zu erkennen, dass $\tfrac{1}{2} \cdot (w_1 - w_2)$ die Frequenz der langsam veränderlichen Amplitudenfunktion ist, während $\tfrac{1}{2} \cdot (w_1 + w_2)$ die Frequenz der schnellen amplitudenmodulierten Oszillation darstellt. Man erkennt außerdem deutlich, dass die beiden Pendelschwingungen um $\tfrac{p}{2}$ gegeneinander phasenverschoben sind. Die Energie wandert zwischen den Pendeln periodisch hin und her.

2. VERSUCHSBESCHREIBUNG

2.1. Die Federkonstante

Zur Bestimmung der Federkonstante der Kopplungsfeder wird diese Vertikal an einer Halterung aufgehängt. Man belastet die als masselos angesehene Feder mit einem bestimmten Gewicht, welches die Feder aus der Ruhelage bis zur Gleichgewichtsalge dehnt. Die Feder wird anschließend ausgelenkt und vollführt eine harmonische Schwingung um ihre Gleichgewichtslage. Man misst dabei die Periodendauer der Schwingung und kann anschließend über die Formel:

$$T = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

die Federkonstante bestimmen.

2.2. Versuchsaufbau und Bestimmung der Trägheitsmomente

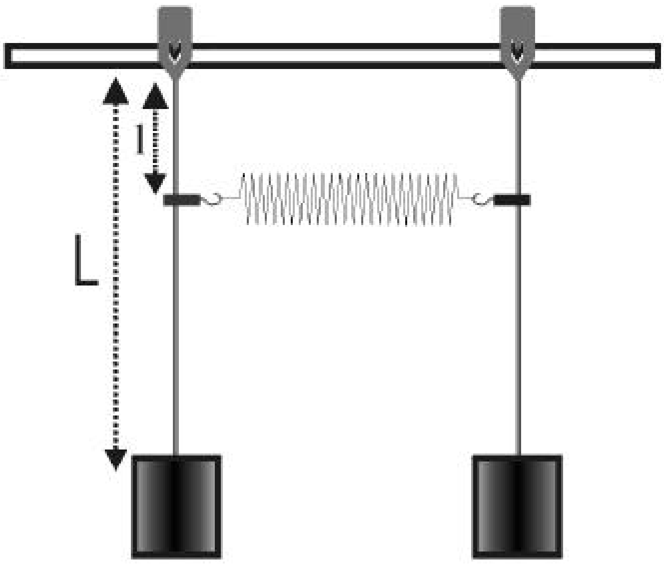

Abbildung 6: Gekoppelte Pendel in Ruhe

Zu Beginn des Versuches muss man die beiden Pendel ohne Kopplungsfeder so justieren, dass sie mit der selben Periodendauer schwingen. Dazu muss man die beiden Massen am Ende des Stabes jeweils etwas variieren. Dies ist besonders wichtig, weil man für den späteren Versuch zwei identische Pendel benötigt. Anschließend misst man mehrmals die Schwingungsdauer der ungekoppelten Pendel, um später das Trägheitsmoment berechnen zu können. Danach wird der Kopplungshaken auf der jeweiligen richtigen Höhe angebracht und die beiden Pendel werden durch eine Kopplungsfeder miteinander verbunden. l ist der Abstand zwischen Kopplungshaken und Drehpunkt, L der Abstand zwischen Schwerpunkt des Pendels und Drehpunkt. Dieser Versuch wird mit zwei verschiedenen Kopplungslängen und zwei verschiedenen Gewichten durchgeführt.

2.3. Bestimmen den Schwingungsdauern der Normalschwingungen

2.3.1. Gleichsinnige Schwingung

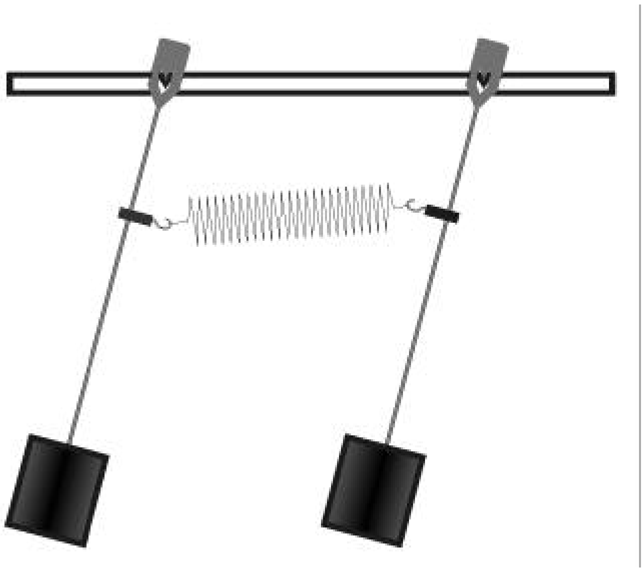

Abbildung 7: Gleichsinnige Schwingung des gekoppelten Pendels

Die nun gekoppelten Pendel werden zuerst beide in die selbe Richtung ausgelenkt und gleichzeitig losgelassen. Sie schwingen gleichsinnig, d.h. es gilt $j_1(t) = j_2(t)$ zu jedem Zeitpunkt *t*. Man misst dabei die Periodendauer der Schwingung T_0, die gleich der Periodendauer der Ruhelage sein sollte, da die Feder nicht belastet wird.

2.3.2. Gleichsinnige Schwingung

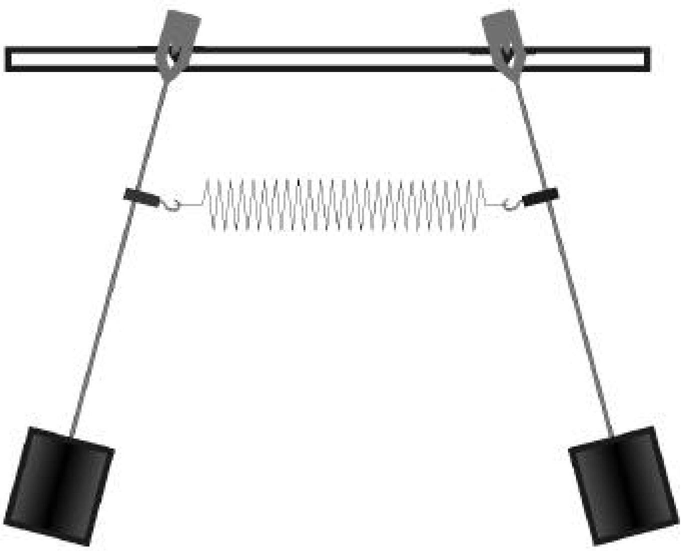

Abbildung 8: Gegensinnige Schwingung des gekoppelten Pendels

Anschließend lenkt man beide Pendel in verschiedene Richtungen mit der selben Amplitude aus und misst die Periodendauer der gegensinnigen Schwingung T_1. Die Feder erfährt bei dieser Schwingungsmode die maximal mögliche Belastung.

2.4. Schwebung

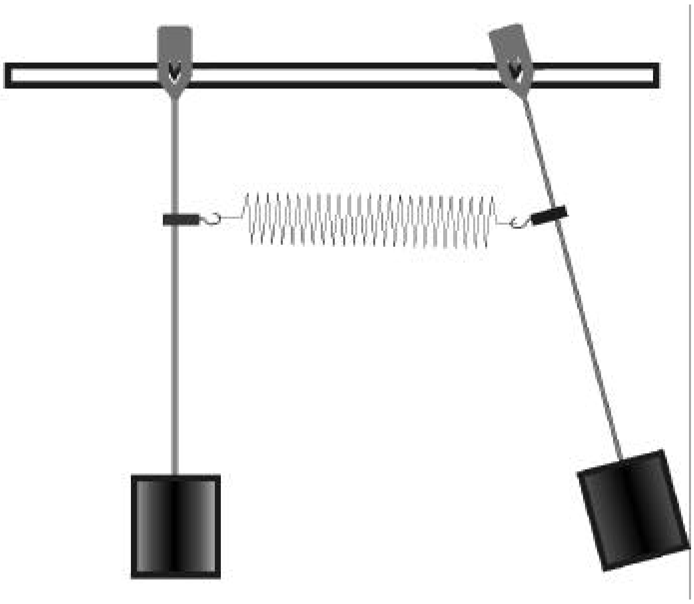

Abbildung 9: Schwebung des gekoppelten Pendels

In diesem Versuch wird eines der Pendel um eine bestimmte Amplitude aus der Ruhelage ausgelenkt, während das andere Pendel festgehalten wird. Lässt man nun beide Pendel los, so stellt sich nach einer kurzen Einschwingphase eine Schwebung ein. Man misst die Zeit $T_3 = 2 \cdot T_S$, wobei T_S die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels, die sogenannte Schwebungsdauer, ist. Hierbei muss man, wie bei allen vorigen Versuchen darauf achten, dass die Amplitude einen bestimmten Wert nicht überschreitet, damit die Kleinwinkelnäherung nicht verletzt wird, da sonst keine harmonische Schwingung mehr vorliegt.

3. VERSUCHSAUSWERTUNG

3.1. Bestimmung der Federkonstanten

Bezeichnungen:

- t: Schwingungsdauer von 10 Perioden
- T: Periodendauer der Federschwingung
- m: Masse des Gewichtstückes
- k: Federkonstante

Formeln: $$T = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Masse m des Gewichtstücks: 20,0 g
Wir gehen von einem geeichten Wägestück aus.

Messungenauigkeit Δt der Zeit für 10 Perioden: 0,3 s
Messungenauigkeit ΔT der Periodendauer: 0,03 s

Bestimmung der Federkonstante	Schwingungsdauer t in [s] für 10 Perioden
Messung 1	6,04
Messung 2	6,01
Messung 3	6,09
Messung 4	6,02
Messung 5	6,06
Messung 6	6,03
Messung 7	5,96
Mittelwert in [s]	6,03
Standardabweichung s_T in [s]	0,0408
Periodendauer T in [s]	0,603
Federkonstante k in [N/m]	2,17
Gauss - Fehler δk in [N/m]	0,2940

Gauss-Fehler: $$dk = \frac{\partial k}{\partial T} \cdot Max(\Delta T; s_T)$$

Daraus folgt für die Federkonstante $k = 2{,}1715 \frac{N}{m} \pm 0{,}2940 \frac{N}{m}$.

3.2. Abmessungen der Körper

Messungenauigkeit Δm der Gewichtsmessung: 0,1 g
Messungenauigkeit Δl der Stablänge: 1 mm
Messungenauigkeit Δl der sonstigen Messungen: 0,05 mm

Im folgenden führen wir unsere Messungen mit zwei verschiedenen Zylindern, einem großen Zylinder, den wir im folgenden als „große Masse“ bezeichnen, und einem kleinen Zylinder, der von uns als „kleine Masse“ bezeichnet wird. Sie dienen jeweils zur Beschwerung des Pendels. Die Schraube, welche ebenfalls vermessen wurde, dient zur Halterung der Kopplungsfeder und wird im folgenden als Punktmasse betrachtet. Bei der kleinen Masse beträgt die Kopplungslänge $l = 0{,}2\ m$ und bei der großen Masse beträgt sie $l = 0{,}4\ m$.

	linkes Pendel	rechtes Pendel	Mittelwert	Standard-abweichung
Zylinder groß				
Masse in [g]	600,5	600,2	600,4	0,2121
Außendurchmesser in [mm]	39,90	39,85	39,88	0,0354
Innendurchmesser in [mm]	4,00	4,00	4,00	0,0000
Länge in [mm]	61,90	62,00	61,95	0,0707
Zylinder klein				
Masse in [g]	302,7	303,3	303,0	0,4243
Außendurchmesser in [mm]	39,90	39,85	39,88	0,0354
Innendurchmesser in [mm]	4,05	4,00	4,03	0,0354
Länge in [mm]	31,00	30,90	30,95	0,0707
Stab				
Masse in [g]	63,3	63,4	63,4	0,0707
Durchmesser in [mm]	3,80	3,80	3,80	0,0000
Länge in [mm]	514,00	514,00	514,00	0,0000
Schraube				
Masse in [g]	25,8	26,1	25,95	0,2121

<u>Bestimmung der Schwerpunkte:</u>

Bezeichnungen:

m_{Stab}:	Masse des Stabs
$m_{Schraube}$:	Masse der Feststellschraube
$m_{Zylinder}$:	Masse des Hohlzylinders
l_{Stab}:	Länge des Stabes
$l_{Zylinder}$:	Länge des Zylinders
l:	Kopplungslänge
L:	Abstand des Drehpunktes zum Schwerpunkt

Formeln:

$$L = \frac{\frac{1}{2} \cdot m_{Stab} \cdot l_{Stab} + m_{Zylinder} \cdot \left(l_{Stab} - \frac{1}{2} \cdot l_{Zylinder}\right) + m_{Schraube} \cdot l}{m_{Stab} + m_{Zylinder} + m_{Schraube}}$$

Gauss Fehler:

$$dL = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial m_{Stab}} \cdot sm_{Stab}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial l_{Stab}} \cdot \Delta l_{Stab}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial m_{Zylinder}} \cdot sm_{Zylinder}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial l_{Zylinder}} \cdot sl_{Zylinder}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial l} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial m_{Schraube}} \cdot \Delta m_{Schraube}\right)^2}$$

Der Schwerpunkt befindet sich bei der kleinen Masse bei folgendem Abstand zum Drehpunkt:
$L = 426{,}56\ mm \pm 0{,}687\ mm$
Bei der schweren Masse befindet sich der Schwerpunkt bei:
$L = 444{,}10\ mm \pm 0{,}391\ mm$

3.3. Bestimmung der Trägheitsmomente

3.3.1. Mit Hilfe der gemessenen Schwingungsdauern

Bezeichnungen:
- t: Schwingungsdauer von 5 Perioden
- T: Periodendauer der Pendelschwingung
- I: Trägheitsmoment des Pendels
- m: Gesamtmasse des Pendels
- L: Abstand des Schwerpunktes zum Drehpunkt

Formeln: $$T = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L}}$$

Größen: g = 9,81 $\frac{m}{s^2}$

Messungenauigkeit Δt der Zeit für 5 Perioden: 0,3 s
Messungenauigkeit ΔT der Periodendauer: 0,06 s

	Pendel mit kleiner Masse		Pendel mit großer Masse	
	links	rechts	links	rechts
	t_l in [s]	t_r in [s]	t_l in [s]	t_r in [s]
Messung 1	6,96	6,89	6,93	6,96
Messung 2	6,91	7,01	6,91	6,95
Messung 3	6,85	6,96	6,92	6,95
Messung 4	6,94	6,94	6,91	6,88
Messung 5	6,93	6,94	6,88	6,9
Mittelwert in [s]	6,92	6,95	6,91	6,93
Standarabweichung in [s]	0,0421	0,0432	0,0187	0,0356
Periodendauer T in [s]	1,38	1,39	1,38	1,39
Trägheitsmoment I in [kgm²]	0,080	0,080	0,145	0,146
Mittelwert in [kgm²]	0,080		0,146	
Gauss-Fehler [kgm²]	0,0069	0,0069	0,0069	0,0069

Das Trägheitsmoment des Pendels mit den kleineren Massen beträgt:

$I_k = 0{,}080\, kg \cdot m^2 \pm 0{,}0069\ kg \cdot m^2$

Für das Pendel mit den größeren Massen beträgt es:

$I_g = 0{,}146\, kg \cdot m^2 \pm 0{,}0069\ kg \cdot m^2$

Gauss-Fehler:

$$dI = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial T} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial m} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial L} \cdot sL\right)^2}$$

3.3.2. Mit Hilfe der geometrischen Zusammenhänge

Bezeichnungen:

m_{Stab}:	Masse des Stabs
$m_{Schraube}$:	Masse der Feststellschraube
$m_{Hohlzylinder}$:	Masse des Hohlzylinders
l_{Stab}:	Länge des Stabes
$l_{Hohlzylinder}$:	Länge des Hohlzylinders
r_{Stab}:	Radius des Stabes
R_{innen}:	Innenradius des Hohlzylinders
$R_{außen}$:	Außenradius des Hohlzylinders
l:	Kopplungslänge
I:	entsprechende Trägheitsmomente

Für die Berechnung des Trägheitsmomentes des Pendels ergeben sich folgende Gleichungen:

$$I_{Stab} = \frac{1}{4} \cdot m_{Stab} \cdot r_{Stab}^2 + \frac{1}{12} \cdot m_{Stab} \cdot l_{Stab}^2 + m_{Stab} \cdot \left(\frac{l_{Stab}}{2} \right)^2$$

$$I_{Schraube} = m_{Schraube} \cdot l^2$$

$$I_{Hohlzylinder} = \frac{1}{4} \cdot m_{Holzylinder} \cdot \left(R_{außen}^2 + R_{innen}^2 + \frac{l_{Hohlzylinder}^2}{3} \right) + m_{Holzylinder} \cdot \left(l_{Stab} - \frac{1}{2} \cdot l_{Hohlzylinder} \right)^2$$

Diese können zusammengefasst werden zu:

$$I = I_{Stab} + I_{Schraube} + I_{Hohlzylinder}$$

Daraus ergeben sich folgende Werte:

Für die kleine Masse: $I_k = 0{,}082\ kg \cdot m^2$

Für die große Masse: $I_g = 0{,}150\ kg \cdot m^2$

Bemerkung: In den folgenden Rechnungen wird stets das aus den Schwingungsdauern berechnete Trägheitsmoment verwendet. Der Grund dafür ist, dass das Trägheitsmoment, welches aus den geometrischen Zusammenhängen abgeleitet wurde, auf vielen Näherungen basiert. Hier sei die Schraube angesprochen, die eigentlich nicht als Punktmasse betrachtet werden kann.

3.4. Normalschwingungen

Bezeichnungen: t: Schwingungsdauer von 5 Perioden
T_0: Periodendauer der gleichsinnigen Pendelschwingung
T_1: Periodendauer der gegensinnigen Pendelschwingung

Messungenauigkeit Δt der Zeit für 5 Perioden: 0,3 s
Messungenauigkeit ΔT_0 bzw. ΔT_1 der Periodendauer: 0,06 s

3.4.1. Gleichsinnige Schwingung

Aus der Messung ergaben sich folgende Werte für die Schwingungsdauer des gekoppelten Pendels mit gleichsinniger Schwingung:

	Pendel mit kleiner Masse	Pendel mit großer Masse
Messung 1	6,91	6,83
Messung 2	6,88	6,85
Messung 3	6,98	6,89
Messung 4	6,95	6,85
Messung 5	6,91	6,92
Messung 6	6,95	6,95
Messung 7	6,83	6,93
Messung 8	6,98	6,88
Messung 9	6,99	6,84
Messung 10	6,95	6,84
Mittelwert in [s]	6,93	6,88
Standarabweichung in [s]	0,0506	0,0429
Periodendauer in [s]	1,387	1,376

Daraus folgt : $T_k = 1{,}387\ s \pm 0{,}06\ s$
$T_g = 1{,}376\ s \pm 0{,}06\ s$

Berechnet man die Periodendauer mit Hilfe der folgenden Gleichung:

$$T = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L}}\ ,$$

so ergeben sich die Werte zu:

Schwingungsdauer mit der kleinen Masse: $T_k = 1{,}390\ s$
Schwingungsdauer mit der großen Masse: $T_g = 1{,}382\ s$

3.4.2. Gegensinnige Schwingung

Aus der Messung ergaben sich folgende Werte für die Schwingungsdauer des gekoppelten Pendels mit gegensinniger Schwingung:

	Pendel mit kleiner Masse	Pendel mit großer Masse
Messung 1	6,71	6,24
Messung 2	6,58	6,32
Messung 3	6,62	6,26
Messung 4	6,62	6,19
Messung 5	6,54	6,26
Messung 6	6,62	6,28
Messung 7	6,61	6,22
Messung 8	6,63	6,26
Messung 9	6,62	6,35
Messung 10	6,58	6,23
Mittelwert in [s]	6,61	6,26
Standarabweichung in [s]	0,0440	0,0470
Periodendauer in [s]	1,323	1,252

Daraus folgt : $T_k = 1{,}323\ s \pm 0{,}06\ s$
$T_g = 1{,}252\ s \pm 0{,}06\ s$

Berechnet man die Periodendauer mit Hilfe der folgenden Gleichung:

$$T = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot L + 2 \cdot k \cdot l^2}}$$

so ergeben sich die Werte zu:

Schwingungsdauer mit der kleinen Masse: $T = 1{,}321\,s$
Schwingungsdauer mit der großen Masse: $T = 1{,}245\,s$

3.5. Schwebung

3.5.1. Mit Hilfe der gemessenen Schwingungsdauern T_2 und T_3

Bezeichnungen: T_2: Periodendauer der amplitudenmodulierten Oszillation
T_3: Doppelte Schwebungsdauer

Messungenauigkeit ΔT_2 der Zeit: 0,06 s bzw. 0,3 s
Messungenauigkeit ΔT_3 der Zeit: 0,3 s

	Kleine Masse		Große Masse	
	T_2 in [s]	T_3 in [s]	$5*T_2$ in [s]	T_3 in [s]
Messung 1	1,34	55,06	6,64	26,37
Messung 2	1,34	55,71	6,63	25,59
Messung 3	1,29	55,53	6,62	25,61
Messung 4	1,31	56,32	6,65	25,67
Messung 5	1,32	55,42	6,62	25,68
Messung 6	1,33	55,30	6,66	25,45
Messung 7	1,31	55,09	6,68	25,79
Messung 8	1,31	55,29	6,60	25,70
Mittelwert in [s]	1,319	55,465	6,638	25,733
Standardabweichung in [s]	0,0173	0,4070	0,0255	0,2758
Periodendauer in [s]	1,319	55,465	1,328	25,733

Es ergibt sich die Schwingungsdauer der amplitudenmodulierten Oszillation zu:
$T_2 = 1{,}319\ s \pm 0{,}3\ s$ bzw. $T_2 = 1{,}328\ s \pm 0{,}06\ s$

Für die doppelte Schwebungsdauer gilt:
$T_3 = 55{,}465\ s \pm 0{,}41\ s$ bzw. $T_3 = 25{,}733\ s \pm 0{,}3\ s$

3.5.2. Mit Hilfe der Schwingungsdauern T_0 und T_1

Formeln:

$$T_2 = \frac{2 \cdot T_0 \cdot T_1}{T_0 - T_1}$$

$$T_3 = \frac{2 \cdot T_0 \cdot T_1}{T_0 + T_1}$$

Es ergibt sich die Schwingungsdauer der amplitudenmodulierten Oszillation zu:

	Kleine Masse		Große Masse
	$T_2 = 1{,}355\ s$	bzw.	$T_2 = 1{,}310\ s$

Für die doppelteSchwebungsdauer gilt:

	$T_3 = 53{,}880\ s$	bzw.	$T_3 = 25{,}213\ s$

3.6. Kopplungsgrad

Bezeichnungen:

- K: Kopplungsgrad
- T_0: Periodendauer der gleichsinnigen Schwingung
- T_1: Periodendauer der gegensinnigen Schwingung
- T_2: Periodendauer der amplitudenmodulierten Osz.
- T_3: doppelte Schwebungsdauer

Die restlichen Bezeichnungen wurden bereits eingeführt.

Formeln:

a) $$K = \frac{k \cdot l^2}{m \cdot g \cdot L + k \cdot l^2}$$

b) $$K = \frac{w_0^2 - w_1^2}{w_0^2 + w_1^2}$$

c) $$K = \frac{2 \cdot w_2^2 \cdot w_3^2}{w_2^2 + w_3^2}$$

$$w = \frac{2 \cdot p}{T}$$

	große Masse	kleine Masse
Kopplung a)	0,1037	0,0503
Gauss - Fehler	0,0126	0,0039
Kopplung b)	0,0937	0,0472
Gauss - Fehler	0,0642	0,0625
Kopplung c)	0,1029	0,0475
Gauss - Fehler	0,0031	0,0108

Eine Berechnung des Kopplungsgrades lieferte folgende Werte:

Für die große Masse: $K = 0{,}1037$
Für die kleine Masse: $K = 0{,}0503$

4. FEHLERDISKUSSION

Als wohl größter Fehler bei diesen Versuchen, muss an erster Stelle wohl die Messungenauigkeit durch das Messen mit Stoppuhren genannt werden. Diese Ungenauigkeit lag häufig deutlich über der Standardabweichung, was bedeutet, dass durch elektronische Messung ein deutlich besseres Versuchsergebnis erzielt werden könnte. Das Problem bestand außerdem darin, jeweils die exakte Mittelstellung des Pendels zu fixieren.
Vor allem bei der Berechnung der Federkonstante, die in viele weitere Berechnungen mit einfloss, fiel dieser Fehler sehr stark ins Gewicht.
Möglicherweise könnte auch die Auslenkung der Pendel zu groß gewesen sein, um noch problemlos die Näherung für kleine Winkel zu benutzen. Das Pendel würde deshalb nicht mehr vollständig harmonisch schwingen und die benutzten Formeln würden nicht mehr ausreichend mit der Realität übereinstimmen.
Zur Berechnung des Trägheitsmomentes wurden zudem einige Näherungen, wie die Betrachtung der Schraube als Punktmasse, gemacht. Das beste Trägheitsmoment konnte deshalb nur experimentell ermittelt werden und wurde deshalb von uns in den weiteren Rechnungen verwendet.
Bei der Messung der amplitudenmodulierten Oszillation haben wir bei der kleinen Masse nur eine Periode gemessen. Es wäre deutlich besser gewesen, wenn wir hier mehrere Perioden gemessen hätten, da dann die Messungenauigkeit nicht so stark ins Gewicht gefallen wäre.
Bei der Messung der Schwebungszeit stellte sich ein recht großes Problem. Man ist gezwungen, die Zeit vom Ruhezustand bis zum übernächsten Ruhezustand zu messen. Der Ruhezustand ist aber recht ungenau zu messen, da die Aufenthaltsdauer im Stillstandsbereich sehr groß ist.
Die hohen Fehler der Kopplung sind nicht unbedingt auf schlechte Messungen unsererseits zurückzuführen. In der Literatur wird darauf hingewiesen, dass diese Größe sehr empfindlich gegen kleinste Messungenauigkeiten sind.
Abschließend sei jedoch darauf hingewiesen, dass die Werte, welche oft auf zwei verschiedenen Weisen ermittelt wurden, größtenteils recht genau übereinstimmen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Bergmann – Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik Band 1 Mechanik, Relativität, Wärme.*
Walter de Gruyter, 1998

[2] Christian Gerthsen: *Physik*.
Springer Verlag, 1999

[3] W. Walcher: *Praktikum der Physik*.
Teubner Studienbücher, 1989

[4] Paul A. Tipler: *Physik*.
Spektrum Akademischer Verlag, 1998

[5] Richard Knoerr: *Knaurs Lexikon der Physik*.
Droemersche Verlagsanstalt, 1988

[6] Hans Breuer: *dtv – Atlas zur Physik*.
Deutscher Taschenbuch Verlag, 1994

[7] Horst Kuchling: *Taschenbuch der Physik*.
Fachbuchverlag Leipzig, 1996

[8] F.K. Kneubühl: *Repetitorium der Physik*.
Teubner Studienbücher, 1990

[9] Horst Stöcker: *Taschenbuch der Physik*.
Harri Deutsch Verlags AG, 1997