Versuch Nr.1
Pendel- und Rollschwingungen

Michael Buser   Anita Lamprecht

2. Oktober 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen

Unter den Bewegungsfreiheitsgraden versteht man die Anzahl unabhängiger Bewegungsrichtungen eines Körpers. Diese Freiheitsgrade können durch sogenannte Zwangsbedingugen eingeschränkt werden, d.h. die Zahl der Freiheitsgrade nimmt mit der Anzahl der voneinander unabhängigen einschränkenden Bedingungen ab.

1.2 Berechnung von Trägheitsmomenten

Trägheitsmomente einfach geformter Körper berechnen sich folgendermaßen:

$$J = \int_V r_\perp^2 dm. \tag{1}$$

Bei homogenen Körpern mit der Massendichte ρ kann die Beziehung dm durch ρdV ersetzt werden, lässt sich zusätzlich noch dV duch $dr_\perp$ ausdrücken, kann das Integral der untenstehenden Form berechnet werden.

$$J = \rho \int_V r_\perp^2 dV. \tag{2}$$

Zur Berechnung des Trägheitsmoments einer Kreisscheibe wird diese in konzentrische Kreisringe zerlegt. Nun geht man davon aus, daß diese Ringe alle die Breite $dr_\perp$, den Achsenabstand $r_\perp$ und die Masse dm besitzen. Läßt sich die Masse eines solchen Ringes durch $dm = 2\pi h\rho r_\perp dr_\perp$ ausdrücken, wobei ρ die Dichte des Scheibenmaterials ist, so gilt: $dJ = r_\perp^2 dm = \pi r^2 h\rho r_\perp^3 dr_\perp$ Damit folgt für das Trägheitsmoment der Kreisscheibe :

$$\begin{aligned} J &= 2\pi h\rho \int_0^R r_\perp r_\perp^2 dr_\perp && (3)\\ &= \pi h\rho \frac{R^4}{2} && (4)\\ &= \frac{1}{2} M R^2 && (5) \end{aligned}$$

wobei M die Masse der Scheibe, also $\pi R^2 h\rho$ ist. Da bei dieser Rechnung die Dicke der Scheibe bereits ohne Einschränkung enthalten ist, stellt diese Gleichung auch das Trägheitsmoment eines Vollzylinders da.

Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders berechnet sich analog zu dem eines Vollzylinders, mit dem Unterschied, daß nicht von 0 bis R, sondern von R_i bis R_a , d.h. vom Innen- bis zum Außenradius integriert wird und sich daraus die Gleichung

$$\begin{aligned} J &= 2\pi h\rho \int\limits_{R_i}^{R_a} r_\perp r_\perp^2 dr_\perp & (6) \\ &= \pi h\rho \frac{(R_a - R_i)^4}{2} & (7) \\ &= \frac{1}{2} M (R_i^2 + R_a^2) & (8) \end{aligned}$$

ergibt, wobei M die Masse des Hohlzylinders, also $\pi(R_a - R_i)^2 h\rho$ ist.

Um das Trägheitsmoment einer Kugel zu berechnen zerlegt man diese in dünne Scheiben, deren Ebenen senkrecht zur Drehachse stehen. Den variierenden Radius dieser Scheiben bezeichnet man mit r , die Dicke einer solchen Scheibe mit dh. Daraus folgt mit (3) für dJ:

$$\begin{aligned} dJ &= \frac{1}{2} r^2 dm & (9) \\ &= \frac{1}{2} \pi\rho r^4 dh & (10) \end{aligned}$$

Aus $r^2 = R^2 - h^2$ ergibt sich

$$dJ = \frac{1}{2} \pi\rho (R^2 - h^2)^2 dh \qquad (11)$$

Da h alle Werte von $-R$ bis R angehmen kann, wobei R den Kugelradius darstellt, folgt schliesslich für das Trägheitsmoment einer Kugel:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \pi\rho \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - h^2)^2 dh & (12) \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi\rho R^5 & (13) \\ &= \frac{2}{5} M R^2 & (14) \end{aligned}$$

wobei M die Masse der Kugel, d.h. $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$, beschreibt.

1.3 Zusammenhang zwischen Schwingungsgleichung und Energiesatz

1.3.1 Physikalisches Pendel

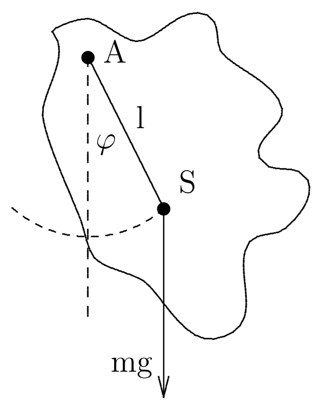

Abbildung 1: Physikalisches Pendel

Ein physikalisches Pendel zeichnet sich dadurch aus, daß seine Masse nicht in einem Punkt konzentriert ist. Zur Aufstellung der Schwingungsgleichung eines solchen Pendels setzt man für das auf das physikalische Pendel wirkende Drehmoment folgende Gleichungen an:

$$\begin{aligned} D &= -r_\perp F = -r_\perp mg \sin\alpha \\ &= J\dot{\omega} \\ &= J\frac{d\dot{\alpha}}{dt} \\ &= J\ddot{\alpha} \end{aligned}$$

mit dem Trägheitsmoment J des Pendelkörpers, dem senkrechten Abstand zur Drehachse $r_\perp$, der rücktreibenden Kraft $-F$ und dem Auslenkwinkel α . Für kleine Winkel α, d.h. für Winkel kleiner als 8 Grad kann $\sin\alpha$ durch α abgeschätzt werden. Daraus folgt die Schwingungsgleichung für ein physikalisches Pendel:

$$J\ddot{\alpha} + r_\perp mg\alpha = 0$$

bzw.

$$\ddot{\alpha} + \frac{r_\perp mg}{J}\alpha = 0$$

hierbei gilt für die Kreisfrequrnz $\omega^2 = \frac{r_\perp mg}{J}$ und somit für die Schwingungsdauer dieses Systems:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{15}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{r_\perp mg}{J}} \tag{16}$$

1.3.2 Mathematisches Pendel

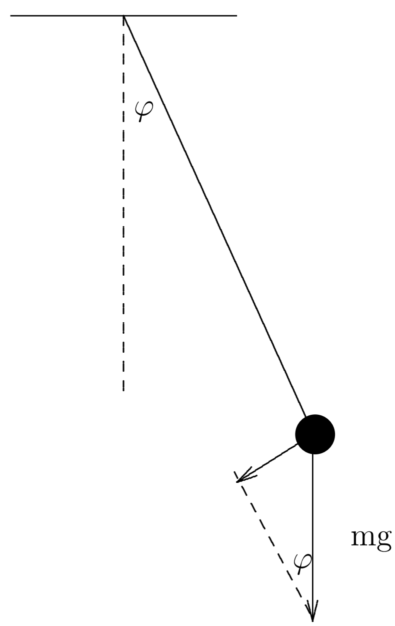

Abbildung 2: Mathematisches Pendel

Das ebene mathematische Pendel schwingt nur in einer Ebene. Die Bezeichnung 'mathematisch' bedeutet, daß die Masse des Pendels nur als ein Massenpunkt und der Aufhängefaden als masselos angenommen wird. Realisiert werden kann ein solches Pendel, indem der Pendelkörper sehr klein und schwer im Vergleich zur Länge bzw. Masse des Aufhängefadens ist. Die Schwingungsgleichung eines mathematischen Pendels wird nun über die Energiemethode hergeleitet. Die kinetische Energie eines solchen Pendels läßt sich folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

da für die tangentiale Geschwindigkeit eines solchen Pendels gilt: $v = l\dot{\alpha}$ mit der Pendellänge l. Für die potentielle Energie in der Höhe h über dem tiefsten Punkt der Schwingung gilt:

$$\begin{aligned} E_{pot} &= mgh \\ &= mg[l - (l - h)] \\ &= mg[l - l\cos\alpha] \\ &= mgl(1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

wobei α den Auslenkwinkel darstellt. Da für kleine Winkel (unter 8 Grad) $1 - cos\alpha$ durch $\frac{\alpha^2}{2}$ angenähert werden. Dann gilt für den Energiesatz:

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{pot} + E_{kin} \\ &= mgl\frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

Differenziert man diese Gleichung einmal nach der Zeit, so erhält man die bekannte Schwingungsgleichung für ein mathematisches Pendel:

$$l\ddot{\alpha} + g\dot{\alpha} = 0$$

oder

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\dot{\alpha} = 0$$

somit gilt für die Kreisfrequenz $\omega^2 = \frac{g}{l}$ und hiermit für die Schwingungsdauer dieses Systems:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned} \tag{17}$$

1.4 Rollschwingungen

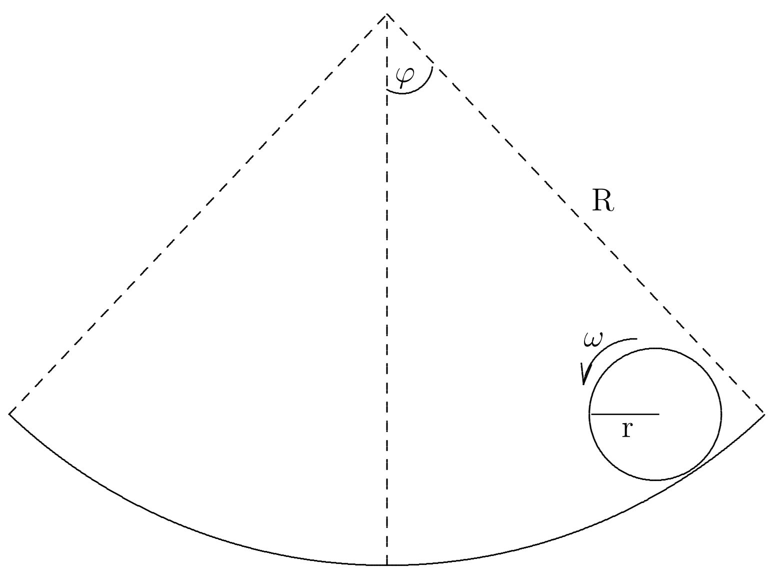

Abbildung 3: Rollschwingugen in einer Hohlkugel

Rollschwingungen bezeichnen die Bewegung eines Körpers, der z.B. in einer Hohlkugel rollt. Um die Schwingungsgleichung einer solchen Bewegung zu bestimmen, wird erneut die Energiemethode bemüht. Betrachtet man die Energie E_{ges} einer solchen Bewegung, so setzt sich diese aus kinetischer, potentieller und Rotationsenegie E_{rot} zusammen, es gilt also:

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{kin} + E_{pot} + E_{rot} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}J\omega^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 + mg(R-r)(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}J\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\alpha}$$

mit den selben Bezeichnungen wie oben. Hierbei stellt J das Trägheitsmoment des Rollkörpers, R den Radius der Hohlkugel, r den Radius des Rollkörpers und α den Auslenkwinkel dar. Differenziert man diese Gleichung nach der Zeit, so folgt:

$$m(R-r)^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + J\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mg(R-r)\sin\alpha\dot{\alpha}$$

Für kleine Winkel α , d.h. für Winkel die kleiner sind als 8 Grad gilt die Näherung $\sin\alpha \approx \alpha$. Damit gilt für die Differentialgleichung

$$(mr^2 + I)(R-r)\ddot{\alpha} + mgr^2\alpha = 0$$

bzw.

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{mgr^2}{(mr^2+I)(R-r)}\right)\alpha = 0$$

Für die Kreisfrequrnz dieses Systems gilt daher:

$$\omega^2 = \frac{mgr^2}{(mr^2+J)(R-r)}$$

Daraus folgt für die Schwingungsdauer dieses Systems:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= 2\pi\sqrt{(mr^2+J)(R-r)mgr^2} \end{aligned} \tag{18}$$

2 Versuchsbeschreibung

2.1 Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem mathematischen Pendel

Zur Bestimmung der Erdbeschleunigung mißt man nach dieser Methode die Schwingungsdauer eines Fadenpendels. Für diese ergibt sich nach Gleichung (17) die Erdbeschleunigung g :

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

Es ergibt sich nun das Problem, daß es sich bei einem realen Pendel aufgrund der Idealisierungen nie um ein wirkliches mathematisches Pendel handeln kann. So besitzt ein solches Pendel in der Realität nie eine punktförmige Masse, sondern eine Kugel, die sich bei ihrer Bewegung um die Schwerpunktachse zusätzlich dreht. Zudem sind die Amplituden eines solchen Pendels meist nicht klein genug. Diese Einflüsse werden berücksichtigt, wenn man von der Schwingungsdauer des physikalischen Pendels ausgeht, da die Drehung der Kugel die Berücksichtigung des Trägheitsmoments J der Kugel mit Bezug auf eine Drehachse durch den Aufhängungepunkt erfordert. Dieses Trägheitsmoment berechnet sich nach dem Satz von Steiner wie folgt:

$$\begin{aligned} J &= J_k + ml^2 \\ &= \frac{2}{5}mR^2 \end{aligned}$$

mit dem Trägheitsmoment J_k der Kugel um eine Achse duch ihren Mittelpunkt und l, dem Abstand zwischen Aufhängepunkt und Kugelmittelpunkt. Nach weiterem Rechnen erhält man als korrigierte Form die Gleichung zur Bestimmung der Erdbeschleunigung:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2})(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2})$$

Die endliche Auslenkung wird hier durch das Glied mit $\sin\frac{\alpha}{2}$ berücksichtigt.

2.2 Messungen mit dem Reversionspendel

Um die Erdbeschleunigung mit einem Reversionspendel zu bestimmen, könnte man von der Gleichung der Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels ausgehen. Das grosse Problem wäre dann die Bestimmung des Trägheitsmoments des Schwigkörpers. Daher wird hier ein anderer Ansatz bevorzugt. Ein Reversionpendel ist ein physikalisches Pendel, daß an jedem Ende ein bewegliches Massestück besitzt an dem jeweils eine Aufhängung angebracht ist. Nun wird das untere Massenstück von der eingestellten Pendellänge l_0 ausgehend immer um $1mm$ verlängert und jeweils die Schwingungsdauer des Pendels gemessen, bis zu einer Längendifferenz von $\Delta l = 1cm$. Anschließend wird die Anordnung umgedreht und die Pendellänge jeweils um $1mm$ verkürzt, wobei wieder jeweils die Schwingungsdauer gemessen wird, bis die Ausgangslänge erreicht wird.

Stellt man nun die so ermittelten Werte für die Pendellängen und die dazugehörigen Schwingungsdauern als zwei Kurven in einem l-T-Diagramm dar, so schneiden sich diese in einem Punkt. Hier ist die Schwingungsdauer des Pendels unabhängig davon, an welchem Massestück das Pendel aufgehängt wurde. Die dieser Schwingungsdauer entsprechende Pendellänge wird als reduzierte Pendellänge bezeichnet. Das Besondere an dieser reduzierten Pendellänge besteht darin, daß ein physikalisches Pendel die selbe Schwingungsdauer besitzt, wie ein mathematisches Pendel gleicher Masse mit dieser reduzierten Pendellänge. Somit kann an dieser Stelle die Gleichung (16) mit der Gleichung (17) gleichgesetzt werden. Daraus folgt dann für die Schwingungsdauer eines solchen Reversionspendels mit reduzierter Pendellänge l_R und damit für die Erdbeschleunigung:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l_R}} \\ g &= \frac{4\pi^2 l_R}{T^2} \end{aligned}$$

2.3 Rollschwingungen

In diesem Versuch werden die Rollschwingungen einer grösseren und einer kleineren Kugel, einer Scheibe und eines Kreisrings in einem Ausschnitt aus einer Hohlkugel aus Glas betrachtet. Die Trägheitsmomente dieser Objekte wurden bereits oben berechnet. Misst man nun die Schwingungsdauer der grösseren Kugel, so läßt sich nach Gleichung (18) der Radius der Hohlkugel wie folgt berechnen:

$$R = r + \frac{mgr^2T^2}{4\pi^2(mr^2 + J)}$$

wobei r hier der Radius, m die Masse, T die Schwingungsdauer und J das Trägheitsmoment der grösseren Kugel ist. Dabei berechnet sich das Trägheitsmoment der grösseren Kugel nach obiger Gleichung. Nun werden die Schwingugszeiten der anderen drei Rollkörper gemessen. Aus Gleichung (18) läßt sich daraus mit dem oben berechneten Radius der Hohlkugel das Trägheitsmomemt der Rollkörper mit folgender Gleichung berechnen:

$$J = \frac{mgr^2T^2}{4\pi^2(R - r)} - mr^2$$

3 Versuchsauswertung

3.1 Fadenpendel

Ausgangswerte:

$$\begin{aligned} \text{Pendellänge} \quad l &= 939mm \quad \Delta l = 0,5mm \\ \text{Periodendauer} \quad T &= 1,94s \quad \Delta T = 0,01ms \end{aligned}$$

Erhaelt man fuer die Erdbeschleunigung g:

T [s] (Periodendauer)	g $[n/kg]$ (ohne Korrektur)	Δg $[N/kg]$ (Größtfehler)	g $[n/kg]$ (mit Korrektur)
1,9433	9,8165	0,005328	9,8228
1,9435	9,8146	0,005327	9,8210
1,9428	9,8211	0,005331	9,8274
1,9417	9,8224	0,005337	9,8388

Mit den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{ohne Korrektur} \quad g &= \frac{4\pi^2 l}{T^2} \\ \text{Größtfehler} \quad \Delta g &= \left|\frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial l}\Delta l\right| \\ \text{mit Korrektur} \quad g &= \frac{4\pi^2}{T^2} l \left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right) \end{aligned}$$

Als Mittelwerte erhält man:

$$\begin{aligned} \text{ohne Korrektur} \quad \overline{g} &= 9,8187\frac{N}{kg} \\ \text{Größtfehler} \quad \overline{\Delta g} &= 0,005331\frac{N}{kg} \\ \text{mit Korrektur} \quad \overline{g} &= 9,8275\frac{N}{kg} \end{aligned}$$

3.2 Reversionspendel

Fuer beide Pendeldurchgaenge (kleinere Masse bzw. groessere Masse schwingt unten) erhaelt man die Steigungen und Achsenabschnitten:

Durchgang	Steigung [s/mm]	Achsenabschnitt [s]
1	0,00072782	1,16500818
2	0,00112182	0,89368182

Daraus erhaelt man als reduzierte Pendellaenge l_R:

$$l_R = 688,65mm$$

Mit der Perdiondauer $T = 1,66606s$ ergibt sich fuer g:

$$\begin{aligned} g &= \frac{4\pi^2 l_R}{T^2} = 9,7893\frac{N}{kg} \\ \text{Größtfehler} \quad \Delta g &= 0,00722\frac{N}{kg} \end{aligned}$$

3.3 Rollschwingungen

3.3.1 Berechnung der Traegheitsmoment aus den geometrischen Daten

Kugel (gross):	$J = \frac{2}{5}mr^2$	$= (50,3847 \pm 0,22663)gcm^2$
Kugel (klein):	$J = \frac{2}{5}mr^2$	$= (13,1079 \pm 0,15154)gcm^2$
Vollzylinder:	$J = \frac{1}{2}mr^2$	$= (6,1107 \pm 0,086053)gcm^2$
Hohlzylinder:	$J = \frac{1}{2}m(r_a^2 + r_i^2)$	$= (13,1555 \pm 0,48634)gcm^2$

3.3.2 Bestimmung des Kugelradius mit Hilfe der großen Kugel

$$\text{Erdbeschleunigung} \quad g = 9,81N/kg \quad \text{(Mittelwert aus den Versuchen)}$$

$$\begin{aligned} \text{Krümmungsradius} \quad R &= r + \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{mgr^2}{mr^2 + I} \\ \text{Größtfehler} \quad \Delta R &= \left|\frac{\partial R}{\partial T}\Delta T\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial m}\Delta m\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial r}\Delta r\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial J}\Delta J\right| \\ \text{mit} \quad \Delta T &= 0,01ms \quad \Delta m = 0,05g \quad \Delta r = 0,05mm \end{aligned}$$

T [s]	R [m]	ΔR [mm]
1,506	0,416	0,522
1,512	0,419	0,531
1,520	0,423	0,541
1,526	0,426	0,548

Mittelwerte:

$$\overline{R} = 0,421m$$
$$\overline{\Delta R} = 0,5355mm$$

3.3.3 Bestimmung der Traegheitsmomente

Fuer das Traegheitsmoment ergibt sich die Formel

$$J = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{mgr^2}{R - r} - mr^2$$

und damit der Größtfehler

$$\Delta J = \left|\frac{\partial J}{\partial T}\Delta T\right| + \left|\frac{\partial J}{\partial m}\Delta m\right| + \left|\frac{\partial J}{\partial r}\Delta r\right| + \left|\frac{\partial J}{\partial R}\Delta R\right|$$

mit $\Delta m = 0,05g$ und $\Delta r = 0,05mm$

Kugel (klein)	$J = 13,271gcm^2$	$\Delta J = 0,1036gcm^2$
Vollzylinder	$J = 5,7858gcm^2$	$\Delta J = 0,0620gcm^2$
Hohlzylinder	$J = 12,619gcm^2$	$\Delta J = 0,1479gcm^2$

4 Fehlerdiskussion

4.1 Fadenpendel

Beim Fadenpendel wird die sogenannte Kleinwinkelnäherung zur Berechnung herangezogen. Das vereinfacht die Sache mathematisch zwar, fordert aber vom Pendel harmonische Schwingungen auszuführen. Gerade fuer große Auslenkungen trifft dieser Sachverhalt nicht mehr zu, womit der Fehler zunimmt. Eine maximale Auslenkung von 8° liefert jedoch noch brauchbare Ergebnisse.
Außerdem wird davon ausgegangen, daß das Fadenpendel ein mathematisches Pendel ist, also die gesamte Masse ist im Schwerpunkt vereinigt und die Aufhängung hat keine Masse.
Bei unserer Durchführung wurde mit einer möglichst niedrigen Auslenkung sowie mit einem sehr dünnen Faden gearbeitet. Eine Vernachlässigung ist daher möglich.
Für den Wert von g findet man für Ulm (Vorlesung Grundlagen I) $9,8089 N/kg$.
Für unseren gemessen Wert ohne Korrektur bedeutet das eine relative Abweichung von $0,099\%$ und für den Wert mit Korrektur $0,190\%$.

4.2 Reversionspendel

Beim Reversionspendel wurde ebenfalls wieder mit der Kleinwinkelnäherung gearbeitet. Dadurch wurde wieder eine geringen Amplitude bei der Durchführung notwendig.
Sehr schwierig war es, den Schneidabstand beim Reversionspendel zu bestimmen, da die zu messende Strecke durch die Form des Pendels selbst nicht genau bestimmt werden konnte.
Die Extrapolation der durch die Meßung errechneten Koordinaten und die Bestimmung der Schnittpunkte dieser ist ebenfalls sehr für das Ergebnis ausschlaggebend, da bereits eine mißlungene Messung ausreicht, um das Ergebnis zu verfälschen.

4.3 Rollschwingungen

Bei diesem Versuch wurde die rollende Kugel durch Rollreibung und Schallerzeugung stark gedämpft. Es ist nicht unbedingt davon auszugehen, daß sich die Dämpfung bei diesem Versuch linear zur Geschwindigkeit verhält

und deshalb ändert sich die Frequenz der schwingenden Kugel. Die Kugel durchlief auch keine exakte Bahn, sondern kam bei ihrer Bewegung immer mehr von dem tiefsten Punkt in der Schalenmitte ab und vollzog zum Schluss hin immer mehr eine Kreisbewegung.
Die Zeit der Kugel wurde zudem nicht maschinell gestoppt, sondern durch die Stoppuhr festgehalten, deren angezeigter Wert sehr von der Tagesform des Experimentators abhing.

Literatur

[1] W. Walcher. *Praktikum der Physik.* Teubner Studienbücher Physik, 1994.

[2] Bergmann, Schäfer. *Lehrbuch der Experimentalphysik - Mechanik, Relativität, Wärme - Band 1.* Walter de Gruyter, 11. Auflage

[3] Christian Gerthsen. *Physik.* Springer - Lehrbuch, 1993

[4] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik.* Fachbuchverlag Leipzig 1996, 16. Auflage

[5] H. Breuer. *DTV - Atlas zur Physik Band 1, Band 2* Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG. München 1994, 4. Auflage